Faculteit der Toegepaste Wiskunde

Kenmerk: TW94/T-adam/97/dd
Datum: 24 oktober 1994

Universiteit Twente

Tentamen Lineaire Strukturen - EL

Dinsdag 25 oktober 1994, 13.30 - 16.30 uur

Opmerking vooraf: Geef duidelijk aan welke stelling(en) uit het diktaat U bij een bewijs of berekening gebruikt; bij een berekening kunt U niet volstaan met alleen de uitkomst.

1. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ is een lineaire afbeelding en $F(\mathbf{u}) \cdot F(\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ voor alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ en een reëel getal $\lambda > 0$.

a. Bewijs: $|F(\mathbf{u})| = \sqrt{\lambda}|\mathbf{u}|$ voor alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

b. Bewijs dat de hoek tussen $F(\mathbf{u})$ en $F(\mathbf{v})$ gelijk is aan de hoek tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ voor alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

2. Gegeven zijn de vektoren $\mathbf{v}_1 = (\cos\varphi, -\sin\varphi, 0), \mathbf{v}_2 = (\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \mathbf{v}_3 = (0,0,1)$, $\mathbf{w}_1 = (\cos\varphi, -\sin\varphi, \sin\varphi, \cos\varphi), \mathbf{w}_2 = (1,0,0,-1)$ en $\mathbf{w}_3 = (0,1,1,0)$, voor zekere $\varphi \in \mathbb{R}$.

a. Laat zien dat $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ is.

b. Bepaal $[\mathbf{v}]_V$ voor de vektor $\mathbf{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1) \in \mathbb{R}^3$.

c. Vul $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ aan tot een orthogonale basis van $\mathbb{R}^4$.

3. Van de 3×3-matrix A is gegeven dat A regulier is en dat

$$A^{-1}\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ -2\beta \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } A^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a. Bepaal de determinant van A^{-1} en bewijs dat $\alpha \neq \beta$.

b. Bepaal A.

c. Bepaal de oplosverzameling van $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha + 3 \\ -2\beta + 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Z.O.Z.

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2\alpha \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ en} \\ \mathbf{b} &= (5, 11, 13, \alpha + 6). \end{aligned}$$

a. Bepaal de waarde(n) van α waarvoor het stelsel oplosbaar is en geef de dimensie van de oplosverzameling.

b. Bepaal de kanonieke rijvorm van A.

Neem voor het vervolg aan dat $\alpha = 0$.

c. Bepaal Ker$A$ en bepaal een steunvektor van de oplosverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

d. Bepaal een basis van Kol(A).

Normering:

1.a: 2	2.a: 3	3.a: 4	4.a: 4
b: 3	b: 2	b: 3	b: 3
	c: 2	c: 3	c: 4
			d: 3

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten.