Universiteit Twente

**Kenmerk:** TW01/DW&MP/04/dh

# Tentamen Lineaire Structuren voor EL (151010)

**Maandag 19 februari 2001, 13.30 – 16.30 uur**

**Opmerking vooraf:** Formuleer zorgvuldig en geef duidelijk aan welke stelling(en) uit het diktaat u bij een bewijs of berekening gebruikt; bij een berekening kunt u niet volstaan met alleen de uitkomst. Gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan.

1. a. Geef de definitie van een lineaire deelruimte $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

   ½ b. Geef de definitie van een lineaire afbeelding $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

   c. Toon aan, met behulp van de definities, dat de kern Ker $F$ van een lineaire afbeelding $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is.

   d. Verzin een lineaire afbeelding $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met Ker $F = \langle(1,2)\rangle$.

2. ~2 a. Bereken de oppervlakte van het parallellogram in $\mathbb{R}^3$ opgespannen door de twee vectoren $u = (1, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$ en $v = (4, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$. 8

   2½ b. Van twee vectoren $u \in \mathbb{R}^n$ en $v \in \mathbb{R}^n$ is gegeven dat $u \perp (u + v)$ en de hoek $\varphi$ tussen $u$ en $v$ is bepaald door $\cos\varphi = -\frac{1}{7}$. Bewijs dat $|v| = 7|u|$.

3. Beschouw de $3 \times 3$-matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -\alpha & 3 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

   2 a. Bereken de determinant van $A$ als polynoom van $\alpha$.

   ~1½ b. Bepaal alle waarden van $\alpha$ waarvoor matrix $A$ inverteerbaar is.

   2 c. Voor $\alpha = 0$ bereken de inverse matrix $A^{-1}$ van $A$.

   3 d. Bepaal, voor alle waarden van $\alpha$, de standaard rijvorm alsmede de kanonieke rijvorm van matrix $A$.

   ~1½ e. Bepaal, voor alle waarden van $\alpha$, de rang van matrix $A$ en een basis van de kern Ker$(A)$.

   ~2½ f. Laat $\alpha = -1$ en de kolomvector $b = (\beta, \beta, 6) \in \mathbb{R}^3$ waarbij $\beta \in \mathbb{R}$. Bepaal alle waarden van $\beta$ waarvoor het inhomogene stelsel $Ax = b$ oplosbaar is voor $x \in \mathbb{R}^3$. Bepaal tevens de niet-lege oplossingsverzameling van het inhomogene stelsel $Ax = b$ (in de vorm van een lineaire variëteit).

**Z.O.Z.**

4. In $\mathbb{R}^2$ is gegeven is de lijn $\ell = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 = 0\}$. Laat de lineaire afbeelding $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven zijn door de orthogonale spiegeling in de lijn $\ell$.

$\frac{1}{2}$ a. Toon aan dat $(2, -1)$ een richtingsvector van de lijn $\ell$ is. Bepaal $F((2, -1)$.

$\frac{1}{2}$ b. Bepaal een vector $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die loodrecht op de lijn $\ell$ staat. Bepaal $F(v_1, v_2)$.

c. Bepaal de representatiematrix $[F]$. Geef uitleg!

Voortaan is gegeven dat de representatiematrix.

$$[F] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

d. Bereken de beeldruimte Im $F$. Is $F$ een surjectieve afbeelding?

$1\frac{1}{2}$ e. Toon aan dat $F$ een symmetrische afbeelding is.

$2$ f. Toon aan dat $F$ een orthogonale afbeelding is.

**Normering:**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.a. | : | 1 | 2.a. | : | 2 | 3.a. | : | 2 | 4.a | : | $1\frac{1}{2}$ |
| b. | : | 1 | b | : | $2\frac{1}{2}$ | b. | : | $1\frac{1}{2}$ | b. | : | $1\frac{1}{2}$ |
| c. | : | $2\frac{1}{2}$ | | | | c. | : | 2 | c. | : | 3 |
| d. | : | $1\frac{1}{2}$ | | | | d. | : | 3 | d. | : | $2\frac{1}{2}$ |
| | | | | | | e. | : | $2\frac{1}{2}$ | e. | : | $1\frac{1}{2}$ |
| | | | | | | f. | : | $2\frac{1}{2}$ | f. | : | 2 |

**Totaal:** $36 + 4 = 40$ punten.