Kenmerk : TW2006/DWMP/06/dh
Datum : 10 april 2006

Vak : **Lineaire Structuren EL**
Vakcode : 151010
Datum : woensdag 19 april 2006
Tijdstip : 9.00 – 12.00 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een rekenmachine is toegestaan (ter controle), maar de gevraagde berekeningen dienen exact te worden uitgevoerd, dus niet in decimale getallen.

1. Van een stelsel lineaire vergelijkingen zijn de aangevulde coëfficiëntenmatrix (*augmented matrix*) A en een oplossingsvector $\mathbf{v}$ gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 pt] Toon aan, zonder de oplossingsverzameling te berekenen, dat $\mathbf{v}$ inderdaad een oplossingsvector is van het stelsel.

(b) [2 pt] Bepaal de canonieke rijvorm (*reduced echelon form*) van A.

(c) [2 pt] Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel zonder gebruik te maken van onderdeel (a). Schrijf de oplossingsverzameling in parametrische vectorvorm.

(d) [2 pt] Bepaal een basis voor de nulruimte van de bijbehorende coëfficiëntenmatrix (*coefficientmatrix*).

(e) [1 pt] Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel door uitsluitend gebruik te maken van de resultaten uit de onderdelen (a) en (d).

(f) [2 pt] Kies een aantal kolommen uit A die een basis vormen voor Col A en bepaal de coördinaatvector van de overige kolommen ten opzichte van deze basis.

2. Gegeven is een 4×4 -matrix A en een vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$; $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Verder is gegeven dat $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Wat kunt u zeggen over:

(a) [1 pt] De rang van A (*rank* A)?

(b) [1 pt] De dimensie van de nulruimte van A?

(c) [1 pt] De determinant van A?

(d) [1 pt] De eigenwaarden van A?

Z.O.Z

3. (a) [2 pt] Geef, voor een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, de definitie van: '$T$ is injectief (*one-to-one*)'.

De matrix A en de vector $\mathbf{v}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

A is de representatiematrix (*standard matrix*) van een lineaire afbeelding T.

(b) [1 pt] Bepaal het beeld (*image*) $T(\mathbf{v})$ van de vector $\mathbf{v}$.

(c) [2 pt] Ga na of T injectief is.

(d) [2 pt] Bepaal alle vectoren $\mathbf{x}$ waarvoor geldt: $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{v})$.

4. De matrix A is gegeven door: $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Hierbij is $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) [2 pt] Bereken $\det A$.

(b) [2 pt] Onderzoek m.b.v. de determinant voor welke waarden van α de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn.

(c) [1 pt] Bewijs dat voor een inverteerbare matrix B geldt: $\det B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}$.
(Hint: gebruik de productregel voor determinanten: $\det CD = (\det C)\,(\det D)$)

Totaal: $27 + 3 = 30$ punten