TENTAMEN LINEAIRE STRUCTUREN voor EL (151010) zaal CC1

Dinsdagmiddag 17 Februari 2004 13.30–16.30 uur

Opmerking vooraf: Geef duidelijk aan welke stelling(en) uit het boek u bij een bewijs of berekening gebruikt. Bij een berekening kunt u NIET volstaan met alleen de uitkomst. Gebruik van de calculator of de grafische rekenmachine is toegestaan, echter alleen als controle. Het gebruik van een mobiele telefoon is verboden.

Opgave 1

Gegeven is het volgende inhomogene stelsel $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ bestaande uit vier vergelijkingen in vijf onbekenden x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{array}{lclclclclcl} 1 \cdot x_1 & - & 3 \cdot x_2 & + & 4 \cdot x_3 & - & 1 \cdot x_4 & + & 9 \cdot x_5 & = & 7 \\ -2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 & - & 6 \cdot x_3 & - & 1 \cdot x_4 & - & 10 \cdot x_5 & = & -7 \\ -3 \cdot x_1 & + & 9 \cdot x_2 & - & 6 \cdot x_3 & - & 6 \cdot x_4 & - & 3 \cdot x_5 & = & 0 \\ \alpha \cdot x_1 & - & 3 \cdot \alpha \cdot x_2 & + & 4 \cdot x_3 & + & 3 \cdot \alpha \cdot x_4 & - & 5 \cdot x_5 & = & -3 \end{array} \qquad \text{waarbij } \alpha \in \mathbb{R}.$$

De matrix A is de 4×5–coëfficiëntenmatrix behorende bij het bovenvermelde inhomogene stelsel van lineaire vergelijkingen (inhomogeneous system of linear equations) $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. De gegeven vector $\vec{b} = (7, -7, 0, -3)^T \in \mathbb{R}^4$ wordt gelezen als een kolomvector.

(a) Laat de vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^5$ gegeven zijn door $\vec{v} = (-42, 0, 5, 14, 4)^T$ gelezen als een kolomvector. Bereken het matrix-product $A \cdot \vec{v}$ (presenteer exact rekenwerk). Concludeer hieruit of de vector $\vec{v}$ wel of niet behoort tot de kern (null space) $Nul(A)$ van de matrix A.

(b) Voor $\alpha = 3$ bepaal de volgende vier essentiële begrippen.

(b1) de kanonieke rijvorm (reduced row echelon form) en de rang $rank(A)$ van matrix A.

(b2) de kolomruimte (column space) $Col(A)$ en een basis ervan. Schrijf de vijfde kolom $\vec{a}_5$ van matrix A als een lineaire combinatie van de eerste kolom $\vec{a}_1$ en derde kolom $\vec{a}_3$ van A, d.w.z. bepaal c_1 en c_2 zo dat $\vec{a}_5 = c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_3$.

(b3) de kern (null space) $Nul(A)$ van de matrix A (presenteer de kern als $SPAN\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$). Vermeld tevens een basis van de kern.

(b4) de rijruimte (row space) $Row(A)$ en vermeld een basis van $Row(A)$ bestaande uit rijen van de matrix A zelf. Schrijf de derde rij $\vec{r}_3$ van matrix A als een lineaire combinatie van de eerste rij $\vec{r}_1$ en tweede rij $\vec{r}_2$ van A, d.w.z. bepaal c_1 en c_2 zo dat $\vec{r}_3 = c_1 \cdot \vec{r}_1 + c_2 \cdot \vec{r}_2$.

(c) Voor $\alpha = 1$ los de volgende vier onderdelen op.

(c1) Laat de vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^5$ gegeven zijn door $\vec{w} = (1, 2, 1, 1, 1)^T$ gelezen als een kolomvector. Bereken het matrix-product $A \cdot \vec{w}$ (presenteer exact rekenwerk). Concludeer hieruit of de vector $\vec{w}$ wel of niet behoort tot de oplosverzameling van het inhomogene stelsel vergelijkingen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

(c2) Bepaal de kanonieke rijvorm (reduced row echelon form) van de aangevulde matrix $[A|\vec{b}]$.

(c3) Bereken de oplosverzameling van het inhomogene stelsel vergelijkingen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Presenteer de oplosverzameling in de vorm $\vec{p} + SPAN\{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2\}$.

(c4) Leg het verband uit tussen de bovenvermelde vector $\vec{w}$ en de schrijfwijze $\vec{p} + SPAN\{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2\}$ voor de oplosverzameling.

(d) Voor willekeurige $\alpha \neq 3$ bepaal de kanonieke rijvorm (reduced row echelon form) van A. Verklaar elke ingewikkelde rekenstap waarbij α is betrokken. Hint: allereerst vegen met de eerste rij, vervolgens vegen met de tweede rij (lastig rekenwerk opschrijven !!), en vereenvoudig de verkregen onderste rij door een deling met de factor $3 - \alpha$.

Antwoord (zelf berekenen): $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Opgave 2 Beschouw de volgende twee 3×3–matrices B en D:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 \\ -3 & -6 & -3 \\ \beta & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & (\alpha)^2 \\ 1 & \beta & (\beta)^2 \\ 1 & \gamma & (\gamma)^2 \end{bmatrix} \quad \text{waarbij } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

(a) Bepaal de determinant $det(B)$ van de matrix B als polynoom van β met behulp van de cofactor ontwikkeling naar de *eerste* rij van de matrix B (cofactor expansion across the first row of B), d.w.z. $det(B) = b_{11} \cdot C_{11} + b_{12} \cdot C_{12} + b_{13} \cdot C_{13}$;
(b) Bepaal alle waarden van β waarvoor de matrix B inverteerbaar (invertible or nonsingular) is.
(c) Voor willekeurige β (mits de inverse B^{-1} bestaat), bereken het element $(B^{-1})_{23}$ van de inverse B^{-1} in de tweede rij en derde kolom. Hint: gebruik de determinant en een speciale cofactor van de matrix B. Waarschuwing: Het berekenen van de inverse matrix B^{-1} als totaliteit vergt lastig rekenwerk met breuken.
(d) Bewijs dat de determinant van de matrix D gelijk is aan $(\beta - \alpha) \cdot (\gamma - \alpha) \cdot (\gamma - \beta)$ door allereerst tweemaal te vegen met de eerste rij van D teneinde twee nullen in de eerste kolom te verkrijgen.

Opgave 3 De lineaire afbeelding (linear transformation) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$T(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) := (u_1 - 3 \cdot u_2 + 5 \cdot u_4 - 7 \cdot u_5,\ 2 \cdot u_3 - 3 \cdot u_4 + 8 \cdot u_5,\ 0) \quad \text{voor alle } \vec{u} \in \mathbb{R}^5.$$

(a) Bepaal de representatie-matrix (standard matrix) C van de lineaire afbeelding T zo dat geldt $T(\vec{u}) = C \cdot \vec{u}$ voor alle kolomvectoren $\vec{u} \in \mathbb{R}^5$.
(b) Los het homogene stelsel $T(\vec{u}) = (0, 0, 0)$ op voor $\vec{u} \in \mathbb{R}^5$.
(c) Ga na of de kolommen van de representatie-matrix C lineair onafhankelijk (linearly independent) zijn respectievelijk de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ opspannen.
(d) Geef uitleg (in woorden) of de lineaire afbeelding T wel of niet surjectief (onto) respectievelijk injectief (one-to-one) is.

Opgave 4 (Theorie vraagstuk) Kies de onderdelen hetzij (a) en (b), hetzij (c) en (d).
(a) Beschrijf het Leontief input-output model zowel in woorden alsmede in formule vorm met verwijzing naar de consumptie (consumption) matrix C en final demand vector $\vec{d}$.
(b) Los het Leontief input-output model op voor de productie vector $\vec{x}$ als de 2×2-matrix C en de final demand vector $\vec{d} \in \mathbb{R}^2$ gegeven zijn door

$$C = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{d} = (12, 20)^T$$

(c) Gegeven zijn de twee $n \times n$-matrices A en B met $B \cdot A = I_{n \times n}$ (de $n \times n$-identity matrix). Bewijs dat het homogene stelsel van lineaire vergelijkingen $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ slechts de triviale nul-oplossing $\vec{x} = \vec{0}$ heeft (vermeld bij elke redenatie de bijbehorende uitleg).
(d) Gegeven zijn de twee $n \times n$-matrices A en B met $A \cdot B = I_{n \times n}$ (de $n \times n$-identity matrix). Bewijs dat, voor elke vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, het bijbehorende inhomogene stelsel van lineaire vergelijkingen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ minstens een oplossing voor $\vec{x}$ heeft (vermeld bij elke redenatie de bijbehorende uitleg).

Normering Totaal: 36 + 4 = 40 punten

1.a	1.0 pnt	2.a	2.5 pnt	3.a	2.0 pnt	4.a	2.0 pnt
1.b1	2.0 pnt	2.b	1.5 pnt	3.b	1.0 pnt	4.b	2.0 pnt
1.b2	2.0 pnt	2.c	1.5 pnt	3.c	2.0 pnt	4.c	2.0 pnt
1.b3	2.0 pnt	2.d	3.0 pnt	3.d	2.0 pnt	4.d	2.0 pnt
1.b4	2.0 pnt						
1.c1	1.0 pnt						
1.c2	2.0 pnt						
1.c3	1.5 pnt						
1.c4	1.0 pnt						
1.d	2.0 pnt						

VEEL SUCCES !!!!!!!!!!

Dringend verzoek: Op het einde van het tentamen
lever het volledig ingevulde ENQUETE formulier in !!

Het gehele tentamen alsmede KORTE ANTWOORDEN
staan vanaf morgen op TELETOP

UITWERKING TENTAMEN LINEAIRE STRUCTUREN voor EL (151010)

Dinsdagmiddag 17 Februari 2004 13.30–16.30 uur

Opgave 1

(a) Matrix-product $A \cdot \vec{v} = \vec{0}$, dus $\vec{v} \in Nul(A)$.

(b1) Laat $\alpha = 3$. Dan $rank(A) = 2$ vanwege twee pivot-kolommen in de volgende kanonieke rijvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b2) Kolomruimte $Col(A) = SPAN\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_3\}$ met eerste kolom $\vec{a}_1 = (1, -2, -3, 3)^T$ en derde kolom $\vec{a}_3 = (4, -6, -6, 4)^T$ zijnde de twee pivotkolommen. Verder $\vec{a}_5 = -7 \cdot \vec{a}_1 + 4 \cdot \vec{a}_3$.

(b3) $Nul(A) = SPAN\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ met de drie vectoren $\vec{v}_1 = (3, 1, 0, 0, 0)^T$, $\vec{v}_2 = (-10, 0, 3, 2, 0)^T$, $\vec{v}_3 = (7, 0, -4, 0, 1)^T$. Een basis van $Nul(A)$ is het stelsel vectoren $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ zelf.

(b4) Rijruimte $Row(A) = SPAN\{(1, -3, 0, 5, -7)^T,\ (0, 0, 1, \frac{-3}{2}, 4)^T\}$ afgelezen uit de kanonieke rijvorm ofwel terugvertaald naar $Row(A) = SPAN\{\vec{r}_i,\ \vec{r}_j\}$ met elk tweetal rijen i en j uit de matrix A zelf. Verder $\vec{r}_3 = 3 \cdot \vec{r}_1 + 3 \cdot \vec{r}_2$.

(c1) Matrix-product $A \cdot \vec{w} = \vec{b}$, dus $\vec{w}$ wel een oplossing.

(c2) $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & \frac{21}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c3) Oplosverzameling in de vorm $\vec{p} + SPAN\{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2\}$ met vector $\vec{p} = (\frac{11}{2}, 0, \frac{-1}{4}, \frac{-5}{2}, 0)^T$ en $\vec{w}_1 = (3, 1, 0, 0, 0)^T$ en $\vec{w}_2 = (\frac{-21}{2}, 0, \frac{5}{4}, \frac{7}{2}, 1)^T$.

(c4) $\vec{w} = \vec{p} + 2 \cdot \vec{w}_1 + 1 \cdot \vec{w}_2$.

(d) Zie de kanonieke rijvorm uit opgave (c2) zonder de aangevulde kolom. Driemaal vegen met de eerste rij en vervolgens tweemaal vegen met de tweede rij (bijvoorbeeld, vierde rij minus $(2 - 2 \cdot \alpha)$ maal de tweede rij) levert een nieuwe vierde rij $(0, 0, 0, 6 - 2 \cdot \alpha, 7\alpha - 21)$ welke te delen is door de gemeenschappelijke factor $3 - \alpha$, en dan verder vegen met de nieuwe vierde rij, enz. enz.

Opgave 2

(a) $det(B) = b_{11} \cdot C_{11} + b_{12} \cdot C_{12} + b_{13} \cdot C_{13}$; ofwel

$$det(B) = (-2) \cdot det \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} - (-6) \cdot det \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ \beta & -5 \end{bmatrix} + (-10) \cdot det \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ \beta & 4 \end{bmatrix}$$

Uiteindelijk volgt dat $det(B) = -84 + 90 + 18 \cdot \beta + 120 - 60 \cdot \beta = 126 - 42 \cdot \beta$.

(b) Matrix B is inverteerbaar dan en slechts dan als $det(B) \neq 0$, dus $\beta \neq 3$.

(c) $(B^{-1})_{23} = \frac{C_{32}}{det(B)} = \frac{24}{126-42\cdot\beta}$ vanwege cofactor $C_{32} = (-1)^5 \cdot det \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = -(6-30)$.

(d) Door tweemaal met de eerste rij te vegen, ontstaat een eerste kolom met twee nullen:

$$det \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ o & \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ 0 & \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{bmatrix} = (1) \cdot det \begin{bmatrix} \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Kortom, $det(D) = (\beta-\alpha)\cdot(\gamma^2-\alpha^2) - (\gamma-\alpha)\cdot(\beta^2-\alpha^2)$. Enig rekenen levert $det(B) = (\beta-\alpha)\cdot(\gamma-\alpha)\cdot(\gamma+\alpha) - (\gamma-\alpha)\cdot(\beta-\alpha)\cdot(\beta+\alpha) = (\beta-\alpha)\cdot(\gamma-\alpha)\cdot[(\gamma+\alpha)-(\beta+\alpha)] = (\beta-\alpha)\cdot(\gamma-\alpha)\cdot(\gamma-\beta)$.

Opgave 3 (a) $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Kolomsgewijs via $T(e_1) = (1,0,0)^T$, $T(e_2) = ...$

(b) Identiek aan som 1(b3) (c) De kolommen van de matrix C zijn wel degelijk lineair afhankelijk (bijvoorbeeld, de eerste en tweede kolommen), en de kolommen van C spannen de ruimte $\mathbb{R}^3$ niet op omdat de derde coordinaat altijd nul blijft.
(d) De lineaire afbeelding T is niet injectief omdat er afhankelijke kolommen zijn, d.w.z. het homogene stelsel $C \cdot \vec{x} = \vec{0}$ heeft meerdere oplossingen. De lineaire afbeelding T is niet surjectief omdat de kolommen niet de ruimte $\mathbb{R}^3$ opspannen, d.w.z. het inhomogene stelsel $C \cdot \vec{x} = \vec{b}$ is onoplosbaar voor zekere vectoren $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, namelijk als $b_3 \neq 0$.

Opgave 4
(a) $\vec{x} = C \cdot \vec{x} + \vec{d}$ ofwel $(I_{n\times n} - C) \cdot \vec{x} = \vec{d}$ met productie vector $\vec{x}$, consumptie-matrix C en final demand vector $\vec{d}$.
(b) Het inhomogene stelsel lineaire vergelijkingen $(I_{n\times n} - C) \cdot \vec{x} = \vec{d}$ uitwerken door het schoonvegen in de aangevulde matrix $[I_{n\times n} - C\ \vec{d}]$. Qua rekenwerk volgt nu

$$[I_{n\times n} - C\ \vec{d}] = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 12 \\ -0.2 & 0.6 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 120 \\ -2 & 6 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 30 \\ -2 & 6 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 30 \\ 0 & 4 & 260 \end{bmatrix} = ...$$

Uiteindelijk levert dat op dat $\vec{x} = (95, 65)$ via het schoonvegen van een inhomogeen stelsel met twee vergelijkingen in twee variabelen.
(c) Gegeven $B \cdot A = I_{n\times n}$. Laat $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ voldoen aan de homogene vergelijking $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Pas nu de matrix B toe op het linker- en rechterlid. Voor het linkerlid volgt op grond van de associativiteit van de matrix-vermenigvuldiging dat $B \cdot (A \cdot \vec{x}) = (B \cdot A) \cdot \vec{x} = I_{n\times n} \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Voor het rechterlid volgt $B \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Kortom, $\vec{x} = \vec{0}$.
(d) Gegeven $A \cdot B = I_{n\times n}$. Laat $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ willekeurig zijn. Pas nu de vector $\vec{b}$ toe op het linker- en rechterlid. Voor het linkerlid volgt op grond van de associativiteit van de matrix-vermenigvuldiging dat $(A \cdot B) \cdot \vec{b} = A \cdot (B \cdot \vec{b})$. Voor het rechterlid volgt $I_{n\times n} \cdot \vec{b} = \vec{b}$. Kortom, $A \cdot (B \cdot \vec{b}) = \vec{b}$, ofwel $\vec{x} = B \cdot \vec{b}$ is een oplossing van het inhomogene stelsel vergelijkingen $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.