Faculteit der Toegepaste Wiskunde
Kenmerk: TW97/T-DWADAM/22/dh
Datum: 12 november 1997

Universiteit Twente

Tentamen Lineaire Structuren EL
(151010)

vrijdag 14 november 1997, 13.30 – 16.30 uur

Opmerking vooraf: Geef duidelijk aan welke stelling(en) uit het diktaat u bij een bewijs of berekening gebruikt: bij een berekening kunt u niet volstaan met alleen de uitkomst.

1. Gegeven zijn twee lineair onafhankelijke vektoren $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Verder is φ_1 de hoek tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, en φ_2 de hoek tussen $\mathbf{v}$ en $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

a. Bewijs dat $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \neq 0$ en bepaal de dimensie van $\mathbf{v} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle$.

b. Laat zien: als de lengte van $\mathbf{u}$ gelijk is aan de lengte van $\mathbf{v}$, dan is $\varphi_1 = \varphi_2$.

2. *a.* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een lineaire afbeelding en

$$\begin{aligned} F(1,0,0) &= (1,1,0) \\ F(1,1,0) &= (1,1,1) \\ F(1,1,1) &= (1,1,1). \end{aligned}$$

Bepaal $[F]$ en bepaal Ker F.

b. $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is een lineaire afbeelding, en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zijn twee verschillende vektoren zodanig dat geldt: $G(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ en $(G \circ G)(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

1. Bewijs dat $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in$ Ker G.
2. Bewijs dat Im $G \neq \mathbb{R}^n$.

3. Beschouw het volgende stelsel van drie vergelijkingen met vier onbekenden.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & (\beta+1)x_4 & = & \alpha+1 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & (\alpha+6)x_3 & + & 4x_4 & = & 4 \\ & & \alpha x_2 & + & \alpha x_3 & + & (\beta-1)x_4 & = & \beta-1 \end{array} \right. , \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Zij A^a de aangevulde matrix bij het gegeven stelsel, d.w.z.

$$A^a = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & \beta+1 & \alpha+1 \\ 3 & 7 & \alpha+6 & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & \alpha & \beta-1 & \beta-1 \end{array} \right].$$

a. Bepaal voor welke waarden van α en β het stelsel oplosbaar is en geef voor die waarden van α en β de dimensie van de oplosverzameling.

b. Bepaal de lineaire variëteit die oplosverzameling is voor het geval $\alpha = \beta = 1$.

Z.O.Z.

4. Laat de lineaire afbeelding $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeven zijn door:

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = (3u_1 - 6u_2 + 7u_3, u_1 + u_2 - u_4, u_3 - u_4).$$

a. Bepaal de representatiematrix A van F.

b. Bepaal de rang van A en een basis van Im F.

5. Beschouw de matrix $A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$.

a. Bewijs dat det $A = \lambda(\lambda - 1)$.

b. Voor welke waarde(n) van λ vormen de rijen van A een basis van $\mathbb{R}^4$?

c. Bepaal A^{-1} als $\lambda = -1$.

d. Bepaal de oplossing van $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ als $\lambda = -1$.

Normering:

1.a: 3	2.a: 4	3.a: 5	4.a: 2	5.a: 3
b: 2	b.1: 2	b: 3	b: 3	b: 2
	b.2: 2			c: 3
				d: 2

Totaal: 36 + 4 = 40 punten.