Tussentoets Kansrekening voor EL (191530062)
Woensdag 3 oktober 2012 van 10.45 tot 12.30 uur

Deze toets bestaat uit 4 opgaven. Vermeld naam en studentnummer op uw werk. Gebruik van een eenvoudige *(geen grafische)* rekenmachine is toegestaan.

1. Geef de definitie van de correlatiecoëfficiënt en bereken $\rho(X, X+Y)$, als X en Y onderling onafhankelijk (o.o.) zijn en beide Poisson verdeeld met parameter $\mu = 2$.

2. Volgens een gynaecoloog blijken 6 van de 10 vrouwen, die volgens een bepaalde "thuis-test" zwanger zijn, helemaal niet zwanger te zijn. Volgens de producent van de thuis-test is het resultaat van de test bij niet-zwangere vrouwen in 90% en bij zwangere vrouwen in 100% van de gevallen juist.
Bepaal de kans p, dat een willekeurige gebruikster van de test zwanger is, als de beweringen van gynaecoloog en producent beide waar zijn. Definieer daartoe eerst relevante gebeurtenissen en geef de gegeven (on)voorwaardelijke kansen in termen van deze gebeurtenissen.

3. Persoon H beweert helderziend te zijn. Om dit te testen, worden hem 10 dozen getoond met in elke doos een hermetisch afgesloten flesje. De flesjes zijn willekeurig gevuld met olie of met water. Persoon H moet per doos zeggen of er olie of water in het flesje zit. Zij X het aantal goede antwoorden. We nemen aan dat H niet helderziend is en per doos willekeurig antwoordt.
Bepaal $P(X \geq 8)$, $E(X)$ en $\mathrm{var}(X)$.

4. (Het wijnproefprobleem) Een proefpersoon, die totaal geen verstand heeft van wijn, krijgt 6 naamkaartjes van 6 verschillende soorten wijn en moet deze, na proeven, zetten bij 6 glazen (genummerd 1 t/m 6) van deze 6 wijnsoorten.
   a. Wat is de kans dat hij (bij toeval) alle 6 namen juist heeft?

   We definiëren nu voor glas $i = 1,2,......,6$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{als hij bij glas } i \text{ de juiste naam zet} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

   Dus het aantal juist geplaatste naamkaartjes is $S = X_1 + X_2 + ... + X_6$.
   b. Bereken $E(X_1)$ en $\mathrm{var}(X_1)$.
   c. Zijn $X_1, X_2, ..., X_6$ o.o.? Motiveer uw antwoord.
   d. Bereken $E(S)$, het verwachte aantal juist geplaatste naamkaartjes.
   e. Bereken $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$ en $\mathrm{var}(S)$.

Normering: (cijfer = 1+ puntentotaal/2)

1	2	3	4a	b	c	d	e	Totaal
3	4	3	1	2	2	1	2	18

De cijfers van deze deeltoets komen op Blackboard te staan. Daar is ook de regeling tussentoets te vinden (op werkindeling).

Uitwerking deeltoets 1 K&S voor INF en TEL op 28 januari 2002

1) $\rho(X,Y)=\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$. We gebruiken alleen dat var(X)=var(Y) en dat X en Y o.o.:

$$\rho(X,X+Y)=\frac{\text{cov}(X,X+Y)}{\sigma_X\,\sigma_{X+Y}}=\frac{\text{cov}(X,X)+\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sqrt{\text{var}(X)+\text{var}(Y)}}=\frac{\text{var}(X)+0}{\sigma_X\sqrt{2\sigma_X^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) Definieer Z = “Gebruikster is zwanger” en T =” Test is positief”.

Dan is gegeven: $P(T\mid Z)=1$, $P(T\mid \overline{Z})=0.10$ en $P(\overline{Z}\mid T)=0.60$

Gevraagd is $p=P(Z)$. Oplossing:

$$0.60=P(\overline{Z}\mid T)=\frac{P(\overline{Z}T)}{P(T)}=\frac{P(T\mid\overline{Z})P(\overline{Z})}{P(T\mid\overline{Z})P(\overline{Z})+P(T\mid Z)P(Z)}=\frac{0.10(1-p)}{0.10(1-p)+1\times p}$$

Dus , $0.06+0.54p=0.10-0.1p$, ofwel $p=\frac{0.04}{0.64}=6.25\%$

3) X~B(10, 1/2), dus

$$P(X\geq 8)=P(X=8)+p(X=9)+P(X=10)=\left[\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right]\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{56}{1024}\approx 5.47\%$$

$E(X)=np=10\times\frac{1}{2}=5$ en $\text{var}(X)=np(1-p)=2.5$

4) a. $P(\text{"6 namen goed"})=\dfrac{1}{6!}=\dfrac{1}{720}$

b. X_1 ~ B(1, 1/6), dus $E(X_1)=\frac{1}{6}$ en $\text{var}(X_1)=\frac{5}{36}$

c. Nee: X_1 =…= X_5 =1, dan is ook X_6 =1, (of bv. $\frac{1}{6}=P(X_1=1)\neq P(X_1=1\mid X_2=1)=\frac{1}{5}$)

d. $E(S)=E(\sum_{i=1}^{6}X_i)=\sum_{i=1}^{6}E(X_i)=6E(X_1)=6\times\frac{1}{6}=1$

e. $E(X_1X_2)=\sum\sum x_1x_2P(X_1=x_1 \text{ en } X_2=x_2)=1\cdot 1\cdot P(X_2=1\mid X_1=1)P(X_1=1)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}$

$\text{cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{180}$

$\text{var}(S)=\text{var}(\sum_{i=1}^{6}X_i)=\sum_{i=1}^{6}\text{var}(X_i)+\sum\sum_{i\neq j}\text{cov}(X_i,X_j)=6\times\frac{5}{36}+30\times\frac{1}{180}=1$