Kenmerk: EWI2011/TW/SOR/01/WS
Datum: 3 november 2011

Universiteit Twente

Kansrekening voor EL (191530062)
Donderdag 3 november 2011 van 8.45-11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven en een tabel van de standaardnormale verdeling.
Gebruik van een *eenvoudige* rekenmachine is toegestaan,
maar gebruik van een *grafische* rekenmachine is *niet* toegestaan.
Vermeld uw naam en studentnummer op al het ingeleverde werk.

[1] 1. a. Geef de definitie van de correlatiecoëfficiënt $\rho(X,Y)$.
Gegeven zijn de stochastische variabelen X en Y met simultane kansdichtheid

$$f(x,y) = \begin{cases} 4e^{-2y} & \text{voor } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

[2] b. Laat zien dat X exponentiëel verdeeld is met parameter 2. (Aanw.: schets eerst het gebied in $\mathbb{R}^2$ waarvoor $f(x,y) > 0$ is.)

[3] c. Bereken $\text{cov}(X,Y)$

[2] 2. a. Geef de kansdefinitie van Laplace, en geef aan wanneer deze kan worden gebruikt.
Bij een spel wordt gegooid met een dobbelsteen waarvan twee vlakken groen zijn, twee vlakken blauw en twee vlakken rood. Er wordt gegooid totdat alle drie de kleuren zijn geworpen. We zijn geïnteresseerd in het aantal malen dat geworpen moet worden.

[2] b. Bepaal de kans dat bij de eerste tien worpen alleen groen wordt geworpen.

[3] c. Bepaal de kans dat bij de eerste tien worpen zowel groen als rood minimaal éénmaal wordt geworpen maar geen blauw.

[2] d. Bepaal de kans dat er precies elf keer geworpen moet worden totdat alle kleuren zijn gegooid.

3. Bij een creditcard organisatie melden zich nieuwe klanten. Bekend is dat de kans dat iemand kredietwaardig is gelijk is aan 98%. Veronderstel dat het kredietwaardig zijn van een klant onafhankelijk is van het kredietwaardig zijn van de andere klanten. Laat K het aantal kredietwaardige klanten zijn dat zich in een week aanmeldt.

[2] a. Veronderstel dat er in een week 100 nieuwe klanten worden aangemeld. Welke verdeling heeft K? Geef EK en $\text{var}(K)$.
In een week komen er N nieuwe klanten, waarbij N Poisson verdeeld is met $EN = 100$. Verder is het kredietwaardig zijn van klanten onafhankelijk van N.

[2] b. Geef $P(K = k|N = n)$ voor $k = 0, \cdots, n$ en $E(K|N = n)$.

[2] c. Geef $P(K = k \text{ en } N = n)$ voor $n = 0, 1, \cdots;\ k = 0, \cdots, n$.

[2] d. Bepaal $P(K = k)$ voor $k = 0, 1, \cdots$. (Aanw.: Gebruik de wet van de totale kans en de gelijkheid $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$.)

Z.O.Z.

4. Bij een geldautomaat in een studentenwijk kan geld worden opgenomen. De bedragen die kunnen worden opgenomen zijn veelvouden van 10 euro. Laat X_i het bedrag zijn (in tientallen euros) dat door de i^e klant wordt opgenomen. Veronderstel dat deze X_i, $i = 1, 2, \cdots$ onderling onafhankelijke gelijk verdeelde stochastische variabelen zijn met $P(X_1 = k) = \frac{1}{5}$ voor $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

$\boxed{2}$ a. Bepaal $E(X_1)$ en $\mathrm{var}(X_1)$.

De geldautomaat wordt éénmaal per dag met briefjes van tien aangevuld tot een vast bedrag $T * 10$ (dus T is het aantal briefjes van tien in de geldautomaat direct na aanvulling). De vraag is hoe groot T gekozen moet worden zodat de kans dat de geldautomaat al door zijn geldvoorraad heen is voordat deze opnieuw aangevuld wordt, kleiner is dan $2\frac{1}{2}\%$. Veronderstel dat er per dag maximaal 50 keer geld wordt opgenomen.

$\boxed{4}$ b. Bepaal m.b.v. de Centrale Limiet Stelling een zo goed mogelijke benadering voor T zodat

$$P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i \geq \mathsf{T}\right) \leq \frac{25}{1000}.$$

5. Gegeven zijn de onderling onafhankelijke stochastische variabelen U en V die beide $N(0,1)$ verdeeld zijn.

$\boxed{3}$ a. Laat zien dat de kansdichtheid van U^2 wordt gegeven door

$$f_{U^2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ b. Geef de simultane kansdichtheid $f_{U^2,V^2}(t,s)$.

$\boxed{2}$ c. Laat zien dat de kansdichtheid van $U^2 + V^2$ wordt gegeven door

$$f_{U^2+V^2}(r) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \frac{e^{-r/2}}{2} & \text{voor } t \geq 0 \end{cases}.$$

(Aanw.: Gebruik de convolutie-integraal en dat $\int_0^1 (t(1-t))^{-\frac{1}{2}}\, dt = \pi$.)

Normering:

1			2				3				4		5			Totaal
a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	a	b	c	
1	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	4	3	2	2	36

$$\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal behaalde punten}}{4} \text{ (afgerond)}$$

De standaardnormale verdeling

De tabel geeft de verdelingsfunctie Φ voor een standaardnormale toevalsvariabele Z:

$$\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$$

Voorbeeld: $\Phi(1.65) = \mathrm{P}(Z \leq 1.65) = 0.9505$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998