



**Kansrekening voor EL (153006)**  
**Woensdag 28 januari 2009 van 9.00-12.00 uur**

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven, een formuleblok en een tabel van de  $N(0, 1)$ -verdeling.  
Vermeld uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

- 3 1. a. De stochastische variabele  $X$  is exponentieel verdeeld met  $EX = 5$ .  
Bepaal de kansdichtheid van  $\ln(X)$ .
- 3 b. Om de tegenvallende resultaten bij het eindexamen wiskunde te verbeteren, wordt een nieuwe lesmethode ontwikkeld. Alvorens deze methode algemeen in te voeren, krijgt gedurende een jaar 10% van de leerlingen les volgens deze methode. Na dit jaar blijkt dat bij de nieuwe methode 90% van de leerlingen een voldoende heeft gehaald. In totaal blijkt 60% van de leerlingen een voldoende te hebben gehaald. We komen een leerling tegen en horen dat hij een voldoende heeft gehaald. Wat is de kans dat deze leerling volgens de oude methode les heeft gehad?
2. In een hoed zitten 10 knikkers: één met nummer 1, twee met nummer 2, drie met nummer 3 en vier met nummer 4. Aselect en zonder terugleggen worden er drie knikkers één voor één uit de hoed getrokken.
- 1 a. Bepaal de kans dat de derde getrokken knikker nummer 2 heeft.
- 2 b. Geef een uitdrukking voor de kans dat de derde getrokken knikker een hoger nummer heeft dan de eerste twee getrokken knikkers.
- 3 c. Zij  $X$  het hoogste getrokken nummer. Geef de kansverdeling van  $X$  en de verwachtingswaarde  $EX$ .
3. Gegeven is dat  $X$  en  $Y$  een simultane kansfunctie hebben die wordt gegeven door  $P(X = i \text{ en } Y = j) = (\frac{1}{2})^{j+2}$  voor  $j = i, i + 1, \dots$  en  $i = 0, 1, \dots$ .
- 2 a. Bepaal de marginale kansfunctie van  $X$ .
- 2 b. Bepaal  $P(X = Y)$ .
4. Gegeven zijn de stochastische variabelen  $X$  en  $Y$  met simultane kansdichtheid
- $$f_{X,Y}(u, v) = \begin{cases} u & 0 \leq u \leq 1 \text{ en } 0 \leq v \leq 2 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$
- 1 a. Bepaal  $f_X(u)$ , de marginale kansdichtheid van  $X$ .
- 2 b. Zijn  $X$  en  $Y$  onafhankelijk? (Motiveer uw antwoord)
- 2 c. Geef de definitie van  $\rho(X, Y)$  en bepaal  $\rho(X, Y)$ .

5. Op een productie-afdeling in een fabriek worden acht uur per dag apparaten gemaakt. Het assembleren van zo'n apparaat kost 3 tot 11 minuten. We nemen daarbij aan dat  $X_i$ , de assemblageduur van apparaat 'i', uniform verdeeld is op het interval  $[3,11]$  en dat de assemblageduren onderling onafhankelijk zijn. De totale assemblagetijd van  $n$  producten geven we aan met  $S_n$  (dus  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ).

2

a. Bepaal  $EX_1$  en  $\text{var}(X_1)$ .

Als het vorige onderdeel niet is gelukt, neem dan in de rest van het vraagstuk aan dat  $EX_1 = 8$  en  $\text{var}(X_1) = 12$ .

2

b. Druk  $E(S_n)$  en  $\text{var}(S_n)$  uit in  $n$ .

2

c. Bepaal  $\rho(S_n, S_{n+1})$ .

3

d. De directie besluit dat een productie van 65 apparaten per dag (van 8 uur werken) wel genoeg is. Zij geven de werknemers dan ook vrij als dit streefaantal bereikt is. Benader de kans dat de werknemers op een willekeurige dag vroeger naar huis mogen in termen van de standaardnormale verdelingsfunctie  $\Phi(t)$  met  $t \geq 0$ .

Normering:

|     |       |     |       |         |        |
|-----|-------|-----|-------|---------|--------|
| 1   | 2     | 3   | 4     | 5       | Totaal |
| a b | a b c | a b | a b c | a b c d |        |
| 3 3 | 1 2 3 | 2 2 | 1 2 2 | 2 2 2 3 | 30     |

$$\text{cijfer} = 1 + 3 \frac{\text{aantal behaalde punten}}{10} \text{ (afgerond)}$$

#### Formules

Hypergeometrische verdeling:  $\text{var}(X) = n \frac{R}{N} \left(1 - \frac{R}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$

Geometrische verdeling:  $\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Erlang verdeling:  $f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (x \geq 0)$

### Standaardnormale verdeling

De tabel geeft de verdelingsfunctie  $\Phi$  voor een  $N(0, 1)$ -verdeelde toevalsvariabele  $Z$ .

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx.$$

De laatste kolom geeft de dichtheid  $\phi$  van de  $N(0, 1)$ -verdeling.

| $z$ | .00  | .01  | .02  | .03  | .04  | .05  | .06  | .07  | .08  | .09  | $\phi(z)$ |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----------|
| 0.0 | 5000 | 5040 | 5080 | 5120 | 5160 | 5199 | 5239 | 5279 | 5319 | 5359 | 0.3989    |
| 0.1 | 5398 | 5438 | 5478 | 5517 | 5557 | 5596 | 5636 | 5675 | 5714 | 5753 | 0.3970    |
| 0.2 | 5793 | 5832 | 5871 | 5910 | 5948 | 5987 | 6026 | 6064 | 6103 | 6141 | 0.3910    |
| 0.3 | 6179 | 6217 | 6255 | 6293 | 6331 | 6368 | 6406 | 6443 | 6480 | 6517 | 0.3814    |
| 0.4 | 6554 | 6591 | 6628 | 6664 | 6700 | 6736 | 6772 | 6808 | 6844 | 6879 | 0.3683    |
| 0.5 | 6915 | 6950 | 6985 | 7019 | 7054 | 7088 | 7123 | 7157 | 7190 | 7224 | 0.3521    |
| 0.6 | 7257 | 7291 | 7324 | 7357 | 7389 | 7422 | 7454 | 7486 | 7517 | 7549 | 0.3332    |
| 0.7 | 7580 | 7611 | 7642 | 7673 | 7704 | 7734 | 7764 | 7794 | 7823 | 7852 | 0.3123    |
| 0.8 | 7881 | 7910 | 7939 | 7967 | 7995 | 8023 | 8051 | 8078 | 8106 | 8133 | 0.2897    |
| 0.9 | 8159 | 8186 | 8212 | 8238 | 8264 | 8289 | 8315 | 8340 | 8365 | 8389 | 0.2661    |
| 1.0 | 8413 | 8438 | 8461 | 8485 | 8508 | 8531 | 8554 | 8577 | 8599 | 8621 | 0.2420    |
| 1.1 | 8643 | 8665 | 8686 | 8708 | 8729 | 8749 | 8770 | 8790 | 8810 | 8830 | 0.2179    |
| 1.2 | 8849 | 8869 | 8888 | 8907 | 8925 | 8944 | 8962 | 8980 | 8997 | 9015 | 0.1942    |
| 1.3 | 9032 | 9049 | 9066 | 9082 | 9099 | 9115 | 9131 | 9147 | 9162 | 9177 | 0.1714    |
| 1.4 | 9192 | 9207 | 9222 | 9236 | 9251 | 9265 | 9279 | 9292 | 9306 | 9319 | 0.1497    |
| 1.5 | 9332 | 9345 | 9357 | 9370 | 9382 | 9394 | 9406 | 9418 | 9429 | 9441 | 0.1295    |
| 1.6 | 9452 | 9463 | 9474 | 9484 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 | 0.1109    |
| 1.7 | 9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 | 0.0940    |
| 1.8 | 9641 | 9649 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 | 0.0790    |
| 1.9 | 9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9761 | 9767 | 0.0656    |
| 2.0 | 9772 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 | 0.0540    |
| 2.1 | 9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 | 0.0440    |
| 2.2 | 9861 | 9864 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 | 0.0355    |
| 2.3 | 9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 | 0.0283    |
| 2.4 | 9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 | 0.0224    |
| 2.5 | 9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 | 0.0175    |
| 2.6 | 9953 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 | 0.0136    |
| 2.7 | 9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 | 0.0104    |
| 2.8 | 9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 | 0.0079    |
| 2.9 | 9981 | 9982 | 9982 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 | 0.0060    |
| 3.0 | 9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 | 0.0044    |
| 3.1 | 9990 | 9991 | 9991 | 9991 | 9992 | 9992 | 9992 | 9992 | 9993 | 9993 | 0.0033    |
| 3.2 | 9993 | 9993 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9995 | 9995 | 9995 | 0.0024    |
| 3.3 | 9995 | 9995 | 9995 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9997 | 0.0017    |
| 3.4 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9998 | 0.0012    |
| 3.5 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 9998 | 0.0009    |
| 3.6 | 9998 | 9998 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 9999 | 0.0006    |

Voorbeeld:  $\Phi(1.65) = P(Z \leq 1.65) = 0.9505$