Kenmerk: EWI2007/TW/SOR/119/jkvo
Datum: 26 oktober 2007

Universiteit Twente

Kansrekening voor EL(153006)
Donderdag 1 november 2007 van 9.00-12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven, een formuleblok en een tabel van de $N(0,1)$-verdeling. Vermeld uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

1. Een student met geldnood wil wat geld verdienen door drie boeken te verkopen van zijn collectie die bestaat uit 25 'horror', 20 'science-fiction' en 30 'fantasy' boeken. Hij wil niet kiezen welke van de 75 boeken hij gaat verkopen en pakt willekeurig drie boeken.
   a. Wat is de kans dat hij van alle genres precies één boek pakt?
   b. Wat is de kans dat alle boeken uit hetzelfde genre komen?
   c. Wat is het verwachte aantal genres waarvan hij boeken verkoopt?

2. Uit een bak met 8 goede en 4 slechte (want al gebruikte) oplaadbare batterijen pak je er willekeurige één. We weten dat het aantal malen dat een slechte batterij nog oplaadbaar is, geometrisch verdeeld is met verwachtingswaarde 5. Bij een goede batterij is dit aantal ook geometrisch verdeeld maar is de verwachtingswaarde 100.
   a. Bepaal de kans dat je een slechte batterij minimaal 10 keer kunt opladen.
   b. Je hebt de batterij 10 maal succesvol opgeladen en bent benieuwd wat de kans is dat je hem nogmaals kunt opladen. Bereken deze kans.

3. Van twee discrete stochastische variabelen X en Y wordt de simultane kansfunctie gegeven door

$$P(X = n \text{ en } Y = m) = \begin{cases} p^{n+m}(1-p^2)(1-p) & \text{voor } m = 0, \cdots, n \text{ en } n = 0, 1, \cdots, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

   a. Laat zien dat $P(Y = m) = (p^2)^m(1-p^2)$ is en bepaal EY.
   b. Bepaal $P(X + Y = 5)$.

4. Gegeven is dat X standaardnormaal verdeeld is.
   a. Bereken de kansdichtheid van X^3.
   b. Bereken $\text{cov}(X, X^3)$.

Z.O.Z

5. Bij het versturen van een file over een mobiel netwerk kan worden gekozen tussen twee technieken. Om deze te vergelijken worden files met beide technieken verzonden. Zij X de benodigde verzendtijd als gekozen wordt voor de eerste techniek en Y de verzendtijd bij de tweede techniek. Uit gegevens blijkt dat de volgende simultane kansdichtheid van X en Y een goed model oplevert:

$$f_{X,Y}(u,v) = \begin{cases} 6e^{-3u-2v} & \text{voor } v \geq 0 \text{ en } u \geq 0 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

   a. Bepaal de marginale kansdichtheid van X.
   b. Zijn X en Y onderling onafhankelijk? (Motiveer uw antwoord.)
   c. Geef de definitie van de correlatiecoëfficiënt van X en Y en bepaal deze coëfficiënt.
   d. Bepaal $P(X < Y)$.

6. Bij de productie van gecompliceerde onderdelen wordt soms een fout gemaakt. De fabrikant wil natuurljk alleen goede onderdelen leveren en test de onderdelen na fabricage. Dit is een tijdrovende procedure, en daarom worden er steeds tien onderdelen tegelijkertijd getest. Als minimaal een van de tien onderdelen defect is, geeft de test dit aan en worden alle onderdelen één voor één getest. Per batch van tien onderdelen zijn dus één of elf tests nodig. De kans dat een onderdeel defect is, is $p = 0{,}01$. Het defect zijn van een onderdeel is onafhankelijk van het defect zijn van andere onderdelen.
   a. Geef de verwachtingswaarde en variantie van het aantal tests dat uitgevoerd wordt bij een willekeurige batch.
   b. Gedurende een dag worden er 20000 batches geproduceerd. Benader de kans dat er meer dan 40000 tests gedaan moeten worden.

Normering:

1			2		3		4		5				6		Totaal
a	b	c	a	b	a	b	a	b	a	b	c	d	a	b	
1	1	2	1	2	3	2	2	2	1	1	2	3	1	3	27

$$\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal behaalde punten}}{3} \text{ (afgerond)}$$

Rekenformules

$$\sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \quad \text{voor } |x| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Standaardnormale verdeling

De tabel geeft de verdelingsfunctie Φ voor een $N(0,1)$-verdeelde toevalsvariabele Z.

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx.$$

De laatste kolom geeft de dichtheid ϕ van de $N(0,1)$-verdeling.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	$\phi(z)$
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359	0.3989
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753	0.3970
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141	0.3910
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517	0.3814
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879	0.3683
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224	0.3521
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549	0.3332
0.7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852	0.3123
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133	0.2897
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389	0.2661
1.0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621	0.2420
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830	0.2179
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015	0.1942
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177	0.1714
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319	0.1497
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441	0.1295
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545	0.1109
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633	0.0940
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706	0.0790
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767	0.0656
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817	0.0540
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857	0.0440
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890	0.0355
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916	0.0283
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936	0.0224
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952	0.0175
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964	0.0136
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	0.0104
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981	0.0079
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986	0.0060
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990	0.0044
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993	0.0033
3.2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995	0.0024
3.3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	0.0017
3.4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	0.0012
3.5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	0.0009
3.6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	0.0006

Voorbeeld: $\Phi(1.65) = P(Z \leq 1.65) = 0.9505$

1. a. $\frac{\binom{25}{1}\binom{20}{1}\binom{30}{1}}{\binom{75}{3}} = \frac{600}{2701} = 0{,}222$

   b. $\frac{\binom{25}{3}+\binom{20}{3}+\binom{30}{3}}{\binom{75}{3}} = \frac{300}{2701} = 0{,}111$

   c. $\mathrm{P}(2\text{genres}) = 1 - \frac{600}{2701} - \frac{300}{2701} = \frac{1801}{2701}$ dus (met X aantal verkochte genres) $EX = 1 * \frac{300}{2701} + 2 * \frac{1801}{2701} + 3 * \frac{600}{2701} = \frac{5702}{2701} = 2{,}11$.

2. a. K batterij minimaal 10 keer laadbaar, $\mathrm{P}(K|S) = \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0{,}1074$.

   b. L minimaal 11 keer laadbaar, $L \subset K$:
   $\mathrm{P}(L|K) = \dfrac{\mathrm{P}(LK)}{\mathrm{P}(K)} = \dfrac{\mathrm{P}(L|S)\mathrm{P}(S) + \mathrm{P}(L|G)\mathrm{P}(G)}{\mathrm{P}(K|S)\mathrm{P}(S) + \mathrm{P}(K|G)\mathrm{P}(G)} = \frac{(\frac{4}{5})^{11} * \frac{1}{3} + (\frac{99}{100})^{11} * \frac{2}{3}}{(\frac{4}{5})^{10} * \frac{1}{3} + (\frac{99}{100})^{10} * \frac{2}{3}} =$
   $0{,}9794$

3. a. $\mathrm{P}(Y = m) = \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{P}(X = n \text{ en } Y = m) = \sum_{n=m}^{\infty} p^{n+m}(1-p^2)(1-p) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{2m+k}(1-p^2)(1-p) = (p^2)^m(1-p^2)\sum_{k=0}^{\infty} p^k(1-p) = (p^2)^m(1-p^2)$; hieruit zien we dat $Y+1$ geometrisch verdeeld is met parameter $(1-p^2)$ en dus $EY = \frac{1}{1-p^2} - 1 = \frac{p^2}{1-p^2}$.

   b. $\mathrm{P}(X + Y = 5) = \sum_{k=3}^{5} \mathrm{P}(X = k \text{ en } Y = 5-k) =$
   $\sum_{k=0}^{2} p^5(1-p^2)(1-p) = 3p^5(1-p^2)(1-p)$.

4. a. $F_{X^3}(t) = P(X^3 \le t) = \mathrm{P}(X \le t^{1/3}) = \Phi(t^{1/3})$ dus
   $f_{X^3}(t) = \frac{d}{dt}F_{X^3}(t) = \phi(t^{1/3}) * (1/3) * t^{-2/3} = \frac{e^{-t^{2/3}/2}}{3t^{2/3}\sqrt{2\pi}}$.

   b. $\mathrm{cov}(X, X^3) = E(X.X^3) - (EX)(EX^3) = E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx =$
   $-x^3\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = 3$.

5. a. $f_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)dv = \begin{cases} \int_0^{\infty} 6e^{-3u-2v}dv = 3e^{-3u} & \text{voor } u \ge 0 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$

   b. $f_Y(v) = 2e^{-2v}$: er geldt dat $f_{X,Y}(u,v) = f_X(u)f_Y(v)$ dus onderling onafhankelijk.

   c. X en Y zijn onderling onafhankelijk dus $\rho(X,Y) = 0$.

   d. $\mathrm{P}(X < Y) = \int_0^{\infty}\int_u^{\infty} 6e^{-3u-2v}dvdu = \int_0^{\infty} 3e^{-5u}du = \frac{3}{5}$

6. a. $\mu = 1 + (1 - (1 - \frac{1}{100})^{10})) * 10 = 1{,}956$;
   $\sigma^2 = (\frac{99}{100})^{10} + (1 - (\frac{99}{100})^{10}) * 11^2 - \mu^2 = 8{,}648$.

   b. met CLS, S is totale aantal tests, $ES = 20000\mu$ en $\sigma_S^2 = \mathrm{var}(S) = 20000\sigma^2$;
   $\mathrm{P}(S > 40000) \stackrel{\text{CC}}{=} \mathrm{P}(S > 40005) = \mathrm{P}(\frac{S-ES}{\sigma_S} > \frac{40005-39124}{415.87}) \approx 1 - \Phi(2{,}118) =$
   $0{,}0171$.