Kenmerk: EWI2006/TW/SOR/112/jkvo
Datum: 24 oktober 2006

Universiteit Twente

Kansrekening voor EL(153006)
Donderdag 2 november 2006 van 13.30-16.30 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven, een formuleblok en een tabel van de $N(0,1)$-verdeling. Vermeld uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

1. Uit een bak met tien gelijke knikkers waarvan er één met '1' genummerd is, twee met '2', drie met '3' en vier met '4' worden twee knikkers getrokken zonder teruglegging.
   a. Bepaal de kans dat de som van de getallen op de knikkers minder is dan 8.
   b. Bepaal de kans dat er twee knikkers met '3' getrokken zijn als gegeven is dat de som van de getallen 6 is.
   c. Wat is de verwachtingswaarde van het eerste getrokken getal?
   d. Wat is de verwachte som van de twee getrokken getallen?

2. Bij de productie van IC's is 1% van de geproduceerde IC's defect. Om de foute IC's er uit te halen worden de IC's voor het verlaten van de fabriek getest. Als bij dit testen een IC wordt afgekeurd dan wordt dit IC in een bak gegooid. Ook bij dit testen worden fouten gemaakt: de kans dat een goed IC ten onrechte wordt afgekeurd is 3% en de kans dat een defect IC wordt goedgekeurd is 2%.
   a. Bepaal de kans dat een willekeurig afgekeurd IC toch goed is.
   b. Op vrijdagmiddag worden de afgekeurde IC's te koop aangeboden. Hoeveel IC's moet je kopen zodat de kans om tenminste één goed IC te kopen, groter dan 90% is?

3. Het aantal bliksemflitsen bij onweer in een minuut blijkt goed te beschrijven te zijn door een stochastische variabele X met $P(X=k)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$ voor $k=0,1,\cdots$ met $\mu=3$. Verder blijkt het aantal bliksemflitsen in een minuut onafhankelijk te zijn van het aantal bliksemflitsen in een andere minuut.
   a. Hoe heet de verdeling van X? Geef EX en $\text{var}(X)$.
   Elke bliksem slaat met kans $p=0{,}001$ in in een elektriciteitscentrale. Veronderstel dat het wel of niet inslaan van een bliksem onafhankelijk is van het inslaan van andere bliksems. Zij N het aantal inslagen in de elektriciteitscentrale gedurende een onweersbui en M het aantal inslagen gedurende één willekeurige minuut tijdens de onweersbui.
   b. Veronderstel dat er gedurende een onweersbui 30 bliksemflitsen zijn. Geef de verdeling van N.
   c. Bereken de kans dat er gedurende een minuut met $X=5$ bliksems, geen inslagen waren (gevraagd wordt dus $P(M=0|X=5)$).
   d. Bereken de kans dat er gedurende één minuut onweer geen inslag in de elektriciteitscentrale plaatsvindt.

Z.O.Z

4. Gegeven zijn de stochastische variabelen X en Y met simultane kansdichtheid

$$f_{X,Y}(u,v) = \begin{cases} e^{-3u}, & 0 \leq u \leq v \leq u+3, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

a. Schets het gebied $D = \{(u,v) | f_{X,Y}(u,v) > 0\}$.
b. Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter 3.
c. Bepaal de kansdichtheid van e^X.
d. Geef de definitie van $\rho(X,Y)$ en bepaal $\text{cov}(X,Y)$.
e. Zijn X en Y onafhankelijk? (Motiveer uw antwoord)
f. Bepaal $P(X+Y \leq 2)$.

5. Op een redelijk drukke straat rijden auto's. Uit onderzoek is gebleken is dat de verwachtingswaarde van de tijdsduren (in minuten) tussen aankomsten van auto's gelijk is aan $\frac{1}{4}$ en de variantie $\frac{1}{16}$. Geef de tussenaankomsttijden aan met T_1, $T_2, \cdots$. Veronderstel dat de tussenaankomsttijden onderling onafhankelijk zijn en dezelfde verdeling hebben. We willen de kans bepalen dat er gedurende een uur 256 of meer auto's arriveren. Deze kans is gelijk aan $P(\sum_{i=1}^{256} T_i \leq 60)$. Zij $S = \sum_{i=1}^{256} T_i$.
a. Geef ES en $\text{var}(S)$.
b. Geef de Centrale Limiet Stelling en gebruik deze stelling om $P(S \leq 60)$ te benaderen.

Normering:

1				2		3				4						5		Totaal
a	b	c	d	a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	e	f	a	b	
2	2	1	1	3	2	1	2	1	3	1	2	3	3	1	3	2	3	36

2 2 2 1 2 2 2 2 1 2

6 5 5

$$\text{cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal behaalde punten}}{4} \text{ (afgerond)}$$

Rekenformules

$$\sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ voor } |x| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$