Kenmerk: TW06/SOR/jkvo
Datum: 26 oktober 2006

Universiteit Twente

Kansrekening voor EL(153006)
Donderdag 26 oktober 2006 van 10.40-12.25 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven, een formuleblok en een tabel van de $N(0,1)$-verdeling. Vermeld uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

1. a. $P(A_1) = \binom{4}{1}^{12} / \binom{48}{12} = 0.00024.$

   b. Neen, want $A_1 \supset A_2 \cap A_3 \cap A_4$ en $0 < P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) < P(A_1) < 1$.

   c. Zij X het aantal poules met vertegenwoordigers uit alle provincies, dan geldt dat

$$E(X) = E\left(\sum_{k=1}^{4} X_k\right) = \sum_{k=1}^{4} E(X_k) = 4 * 0.00024 = 0.00096$$

2. D: donor is drager; V: test vindt dat donor drager is
   $P(V|D) = 0{,}99$ en $P(\bar{V}|\bar{D}) = 0{,}98$

   a. Bij alle 10 goed: $P(V|D)^{10} = 0.904$.

   b. X heeft $B(10000; 0{,}02)$ verdeling dus $EX = 200$ en var(X)=196.
   Centrale limietstelling met continuïteitscorrectie (*):

$$\begin{aligned} P(X > 220) &\overset{*}{=} P(X > 220{,}5) = P\left(\frac{X - EX}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} > \frac{220{,}5 - 220}{14}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{41}{28}\right) = 0{,}07156\ (0{,}07214). \end{aligned}$$

   c.

$$\begin{aligned} P(D|V) &= \frac{P(V|D)P(D)}{P(V|D)P(D) + P(V|\bar{D})P(\bar{D})} \\ &= \frac{0{,}99 * 10/10010}{0{,}99 * 10/10010 + 0{,}02 * 10000/10010} = \frac{9{,}9}{209{,}9} \approx 4{,}7\%. \end{aligned}$$

3. a. voor $5 \le u \le 10$:

$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)dv = \int_{u-3}^{\infty} \frac{e^{(-v+3-u)/2}}{10} dv = \left[\frac{e^{(-v+3-u)/2}}{5}\right]_{u-3}^{\infty} = \frac{1}{5}.$$

   b. $f_W(t) = \frac{d}{dt} F_W(t) = -f_R(1000/t).\frac{-1000}{t^2} = \begin{cases} \frac{200}{t^2}, & \text{voor } t \in [100, 200] \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$
   omdat $F_W(t) = P(W \le t) = P(\frac{1000}{R} \le t) = P(R \ge \frac{1000}{t}) = 1 - F_R(\frac{1000}{t})$.

   c. Neen, $f_X(8) > 0$, $f_Y(4) > 0$ en $f_{X,Y}(8,4) = 0$ dus $f_{X,Y}(8,4) \neq f_X(8) f_Y(4)$.

   d. $P(X < Y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=u}^{\infty} f_{X,Y}(u,v) dv du = \int_{u=5}^{10} \int_{v=u}^{\infty} \frac{e^{(-v+3-u)/2}}{10} dv du = e^{-3/2}$.

Z.O.Z

4. a. $f_Z(t) = f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t/2} & t \geq 0 \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$ (geheugenloosheid).

   b. T=min(X, Y) dus (voor $t \geq 0$)
   $P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X > t \text{ en } Y > t) = 1 - P(X > t)P(Y > t) = 1 - e^{-t}$

   c. $\rho(Z, V) = \frac{\text{cov}(Z,V)}{\sqrt{\text{var}(Z)\text{var}(V)}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ omdat $V = T + Z$ en
   $\text{cov}(Z, V) = \text{cov}(Z, T) + \text{cov}(Z, Z) = \text{var}(Z) = 4$ en
   $\text{var}(V) = \text{var}(T) + \text{var}(Z) = 1 + 4 = 5$.

5. Laat W de wachttijd zijn, dan is $W = \sum_{i=1}^{49} X_i$ dus $E(W)$=49*2=98 en var(W)=49*2^2=196. De centrale limietstelling zegt dat

$$\begin{aligned} P(W > 90) &= P\left(\frac{W - E(W)}{\sqrt{\text{var}(W)}} > \frac{90 - 98}{14}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(-\frac{8}{14}) = \Phi(\frac{8}{14}) = 0{,}7162 \ (0{,}7157). \end{aligned}$$