Kenmerk: TW06/SOR/jkvo
Datum: 7 november 2006

Universiteit Twente

Kansrekening voor EL(153006)
Donderdag 2 november 2006 van 13.30-16.30 uur

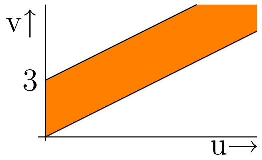
Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven, een formuleblok en een tabel van de $N(0,1)$-verdeling. Vermeld uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

1. Zij T_1 (T_2) het getal op de eerste (tweede) getrokken knikker.
   a. $P(T_1 + T_2 < 8) = 1 - P(T_1 + T_2 \geq 8) = 1 - P(T_1 = 4, T_2 = 4) = 1 - \binom{4}{2}/\binom{10}{2} = \frac{13}{15}$.
   b. $P(T_1 = T_2 = 3 | T_1 + T_2 = 6) = \frac{P(T_1 = T_2 = 3)}{P(T_1 + T_2 = 6)} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{2} + \binom{2}{1}\binom{4}{1}} = \frac{3}{11}$.
   c. $E(T_1) = \sum_{k=1}^{4} kP(T_1) = k = 1\frac{1}{10} + 2\frac{2}{10} + 3\frac{3}{10} + 4\frac{4}{10} = 3$
   d. $E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 3 + 3 = 6$.

2. G="IC goed"; A="IC afgekeurd".
   a. $P(G|A) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|G)P(G)}{P(A|G)P(G) + P(A|\bar{G})P(\bar{G})} = \frac{297}{395}$.
   b. Als je er n koopt, is de kans dat ze allemaal defect zijn $\left(\frac{98}{395}\right)^n$. Dit moet kleiner zijn dan 10% dus $n = 2$.

3. a. Poisson, met $EX = \text{var}(X) = \mu = 3$.
   b. N is binomiaal verdeeld met $n = 30$ en $p = 0{,}001$.
   c. $P(M = 0 | X = 5) = (1 - p)^5 = (1 - 0{,}001)^5 = 0{,}995$.
   d. $P(M = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(M = 0 | X = k) P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1-p)\mu)^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-p\mu} = e^{-0{,}001} = 0{,}997$.

Z.O.Z

4. a. 

b.
$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)dv = \begin{cases} 0 & u < 0, \\ \int_u^{u+3} e^{-3u}dv = 3e^{-3u} & u \geq 0. \end{cases}$$

c. Noem $Z = e^X$. Dan geldt dat
$$f_Z(t) = \frac{d}{dt}F_Z(t) = f_X(\ln(t)).\frac{d}{dt}\ln(t) = \begin{cases} 0 & t < 1, \\ 3t^{-4} & t \geq 1, \end{cases}$$
omdat $F_Z(t) = P(e^X \leq t) = P(X \leq \ln(t) = F_X(\ln(t))$.

d. $\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$ en
cov(X,Y) $= E(XY) - E(X)E(Y) = (\frac{2}{9} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}) = \frac{1}{9}$ omdat
$E(X) = \frac{1}{3}$ en
$$\begin{aligned} E(X^kY) &= \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{\infty} u^k v f_{X,Y}(u,v)dvdu = \int_{u=0}^{\infty}\int_{v=u}^{u+3} u^k ve^{-3u}dvdu \\ &= \int_{u=0}^{\infty} u^k(3u + \frac{9}{2})e^{-3u}du = \frac{(k+1)!}{3^{k+1}} + \frac{3k!}{2.3^k}. \end{aligned}$$

e. Neen. Uit tekening blijkt dat $f_X(1) > 0$, $f_Y(5) > 0$ en dat $f_{X,Y}(1,5) = 0$ dus $f_{X,Y}(1,5) \neq f_X(1)f_Y(5) > 0$.

f. Met bovenstaande tekening:
$$\begin{aligned} P(X+Y \leq 2) &= \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{2-u} f_{X,Y}(u,v)dvdu \\ &= \int_{u=0}^{1}\int_{v=u}^{2-u} e^{-3u}dvdu = \int_{u=0}^{1} 2(1-u)e^{-3u}du \\ &= -\frac{2}{3}(1-u)e^{-3u}\Big|_{u=0}^{1} - \int_{u=0}^{1}\frac{2}{3}e^{-3u}du = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}(e^{-3} - 1) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{2}{9}e^{-3} \end{aligned}$$

5. a. $ES = E\left(\sum_{i=1}^{256} T_i\right) = \sum_{i=1}^{256} E(T_i) = 64$ en
var$(S) = \sum_{i=1}^{256}$ var$(T_i) = 16$ (mag omdat $T_i's$ onafhankelijk).

b. $P(S \leq 60) = P\left(\frac{S-E(S)}{\sqrt{\text{var}(S)}} \leq \frac{60-64}{4}\right) \approx \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 =$ 0,1587 .