twt faculteit
toegepaste wiskunde

Kenmerk: TW00/SOR-013/jkvo
Datum: 27 januari 2000

Kansrekening voor EL(153006)
Vrijdag 4 februari 2000 van 9.00-12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Vermeld uw studentnummer op werk en tentamenbriefje.

1. Gegeven zijn de stochastische variabelen X en Y met $EX = EY = 1$, $\text{var}(X) = 2$ en $\text{var}(Y) = 8$.
   a. Geef de definitie van $\rho(X, Y)$.
   b. Bereken cov(X,Y) als gegeven is dat $\text{var}(X + Y)=8$.
   c. Welke waarde kan $\text{var}(X + Y)$ maximaal aannemen?

2. Bij het indelen van werkcollegegroepen wordt gezien de capaciteit van zalen, een maximum aangehouden van 20 personen per groep. Er zijn honderd studenten, dus 5 groepen lijkt noodzakelijk. Ervaring leert echter dat rond de 30% van de studenten niet naar de werkcolleges gaat. Uit efficiëntie overweging worden de studenten daarom willekeurig verdeeld over 4 groepen genummerd 1 t/m 4. Veronderstel dat inderdaad 30 studenten niet naar de werkcolleges gaan. Zij A_i de gebeurtenis dat groep 'i' overvol zit (dat wil zeggen dat meer dan 20 van de 25 studenten uit groep 'i' werkcollege willen volgen) en definieer $p_i = P(A_i)$.
   a. Bepaal een uitdrukking voor p_i, de kans dat groep 'i' meer dan 20 studenten bevat die werkcollege gaan volgen. (Uitrekenen geeft $p_i \approx 6\%$)
   b. Zijn de gebeurtenissen A_1 t/m A_4 onafhankelijk? (Motiveer je antwoord)
   c. Bepaal het verwachte aantal groepen dat overvol zit. (Aanwijzing: het is **niet** nodig de verdeling te vinden van het aantal groepen waarvan te veel studenten komen.)

3. Gegeven zijn de onderling onafhankelijke stochastische variabelen U en V die beide exponentieel verdeeld zijn met $EU = 2$ en $EV = 4$.
   a. Bepaal de kansdichtheid van $\ln(U)$.
   b. Geef de simultane kansdichtheid $f_{U,V}(t, s)$.
   c. Bepaal $P(U + V \leq 6)$.

4. Uit een bak met 10 rode en 40 witte knikkers wordt 100 maal getrokken **met** teruglegging waarbij N maal een rode knikker wordt getrokken.
   a. Geef de verdeling, de verwachtingwaarde en de variantie van N.
   b. Benader $P(|\frac{N}{100} - \frac{1}{5}| > \frac{1}{20})$ in termen van de standaardnormale verdelingsfunctie $\Phi(x)$ met $x \geq 0$.

Z.O.Z

5. Griep wordt veroorzaakt door virussen. Deze virussen komen in verschillende varianten voor waarvan sommige meer last veroorzaken dan andere. De meeste last wordt veroorzaakt als uit twee virusvarianten een nieuwe variant ontstaat. Veronderstel dat het wel of niet ontstaan van een nieuwe variant in een jaar onafhankelijk is van wat er in andere jaren gebeurt. Zij N het aantal jaren dat het duurt tot er een nieuwe variant ontstaat. Uit onderzoek blijkt dat $EN = 40$.

a. Geef de verdeling van N en bepaal de kans dat er in een jaar een nieuwe variant ontstaat.

Elk jaar vindt één griepgolf plaats. Deze griepgolf wordt met kans $\frac{1}{13}$ een epidemie als deze door een bestaande virusvariant wordt veroorzaakt (onafhankelijk van wat er in andere jaren gebeurt) en de griepgolf wordt met kans 1 een epidemie als een nieuwe virusvariant de oorzaak is.

b. Gedurende een jaar vindt er een griepepidemie plaats. Bepaal de kans dat deze wordt veroorzaakt door een nieuwe variant.

Laat M het aantal griepepidemiën zijn in de periode tussen twee epidemiën veroorzaakt door nieuwe varianten.

c. Geef $P(M = 0|N = 30)$ waarbij $N = 30$ inhoudt dat er 29 achtereenvolgende jaren zijn waarbij de griepgolf wordt veroorzaakt door een bestaande virusvariant.

d. Bepaal $P(M = 0)$.

Normering:

1			2			3			4		5				Totaal
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	a	b	c	d	
1	2	1	2	2	2	3	1	3	2	3	2	2	1	3	30

$$\text{cijfer} = 1 + 3\,\frac{\text{aantal behaalde punten}}{10}\ \text{(afgerond)}$$