Tentamen en Uitwerking

Kansrekening voor EL [HBO&D2] (153006)
Dinsdag 17 augustus 1999 van 13.30 -16.30 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven en 1 tabel
Vermeld ook uw studentnummer op werk en tentamenbriefje

1. Geef de kansdichtheid van X en bereken $P(X < 2)$ als gegeven is dat X normaal verdeeld is met $EX = 3$ en $E(X^2) = 13$.

2. Bij een sporttoernooi komen uit alle 12 provincies precies 4 ploegen. De ploegen worden willekeurig ingedeeld in 4 poules van elk 12 ploegen. Laat A_i de gebeurtenis zijn dat in poule 'i' alle provincies vertegenwoordigd zijn $(i = 1, 2, 3, 4)$.

   a. Bepaal $P(A_1)$, m.a.w. bepaal de kans dat in poule '1' een ploeg uit iedere provincie zit.

   b. Zijn A_1, A_2, A_3 en A_4 onderling onafhankelijk? (Motiveer uw antwoord)

   c. Wat is het verwachte aantal poules waarvoor geldt dat alle provincies vertegenwoordigd zijn? (Aanw: definiëer voor $i = 1, 2, 3, 4$ de stochastische variabelen X_i met $X_i = 1$ als in poule 'i' alle provincies zijn vertegenwoordigd en met $X_i = 0$ anders.)

3. Bij de bloedbank wordt al het bloed dat afgenomen wordt, getest op een bepaalde bloedziekte. De test om deze bepaalde bloedziekte op te sporen geeft met kans 99% het juiste antwoord wanneer er bloed getest wordt van een besmette donor en met kans 98% wanneer het bloed van een niet besmette donor afkomstig is. Het al dan niet een fout maken bij een proef is onafhankeijk van het maken van een fout bij andere proeven. Neem aan dat er gedurende een jaar 10 donoren met en 10000 donoren zonder deze ziekte zijn.

   a. Geef een uitdrukking voor de kans dat al de besmette donoren door de test als drager van de ziekte worden herkend en bepaal het verwachte aantal donoren die terecht als drager worden herkend.

   b. Benader de kans dat er meer dan 220 donoren ten onrechte als drager van de ziekte zijn aangewezen.

   c. Bepaal met behulp van de regel van Bayes de kans dat een donor die door de test als drager van de ziekte wordt aangewezen ook werkelijk drager is.

4. Bij het kiezen van een scheepvaartroute is de reistijd van belang. Er zijn twee alternatieve routes. Zij X de reistijd voor route 1 en Y de reistijd voor route 2. De reistijd wordt onder andere beïnvloed door het weer. Uit gegevens blijkt dat de volgende simultane kansdichtheid van X en Y een goed model oplevert:

$$f_{X,Y}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(v+3-u)/2}}{10} & \text{voor } v \geq u-3 \text{ en } 5 \leq u \leq 10 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

   a. Laat zien dat de marginale kansdichtheid van X gegeven wordt door

$$f_X(u) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{voor } 5 \leq u \leq 10 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

   b. De winst W die wordt gemaakt is omgekeerd evenredig met de reistijd; neem aan dat $W = 1000/R$ waarbij R de reistijd is. Bepaal de kansdichtheid van W als route 1 genomen wordt (dus met $f_R(u) = f_X(u)$ voor $u \in \mathbb{R}$).

   c. Zijn X en Y onderling onafhankelijk? (Motiveer uw antwoord.)

   d. Bepaal $P(X < Y)$.

5. Bij een benzinestation zijn twee pompen. Ga ervan uit dat het tanken met afrekenen per auto een exponentieel verdeelde tijd duurt met voor beide pompen een gemiddelde van 2 minuten en dat al deze duren onderling onafhankelijk zijn. Op een gegeven moment komt Jan aan en hij ziet dat beide pompen bezet zijn maar dat er verder niemand staat te wachten. Zij X (resp. Y) de tijd die het *nog* duurt tot de auto bij pomp 1 (pomp 2) klaar is, Z de tijd die Jan nodig heeft voor het tanken met afrekenen zelf en V de totale tijd die Jan bij het benzinestation is totdat hij klaar is.

   a. Geef de kansdichtheid van Z en de kansdichtheid van X. Laat T de tijd zijn die verstrijkt totdat één van de pompen vrijkomt zodat Jan kan gaan tanken, dus $T = \min(X, Y)$.

   b. Toon aan dat T exponentieel verdeeld is met parameter 1.

   c. Bereken $\rho(Z, V)$.

Normering:

1	2			3			4				5			Totaal
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	
3	2	3	2	2	5	2	2	3	1	3	2	3	3	36

Uitwerking tentamen d.d. 17 augustus 1999

1. Gegeven is dat X $N(\mu, \sigma^2)$ verdeeld is met $\mu = EX = 3$ en $\sigma^2 = \text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = 4$. Er geldt dus dat

$$f_X(t) = \frac{e^{-(t-3)^2/8}}{\sqrt{8\pi}}$$

en

$$P(X < 2) = P(\frac{X - EX}{\sqrt{\text{var}(X)}} < \frac{2-3}{2}) = \Phi(-\frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) = 0,3085.$$

2. Schrijf de uitkomstenruimte als

$$S = \{\{n_1, \cdots, n_{12}\} \times \{n_{12}, \cdots, n_{24}\} \times \{n_{25}, \cdots, n_{36}\} \times \{n_{37}, \cdots, n_{48}\} | n_i \neq n_j \text{ voor } i \neq j\},$$

waarbij n_i een naam van een club is.

a. Met de kansdefinitie van Laplace vinden we dat

$$P(A_1) = \frac{N(A_1)}{N(S)} = \frac{\binom{4}{1}^{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}}{\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}} = 0,0002.$$

(Merk op dat $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4)$.)

b. Zij zijn niet onafhankelijk omdat $A_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ en

$$0 < P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \neq P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_4).$$

De kansen kunnen analoog aan a. berekend worden.

c. Laat X het aantal poules zijn waarin alle provincies zijn vertegenwoordigd. Met behulp van de aanwijzing zien we dat $X = \sum_{i=1}^4 X_i$ en dat $P(A_i) = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0)$. Nu vinden we dat $EX = E\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right) = \sum_{i=1}^4 E(X_i) = 4P(A_1)$.

3. a. Laat Y het aantal herkende dragers zijn. Dan is Y binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0,99$. Nu is het duidelijk dat $P(Y = 10) = (0,99)^{10} = 0,904$ en dat $EY = 10 \times 0,99 = 9,9$.

b. Laat Z het aantal ten onrechte 'herkende' donoren zijn. Ook Z is binomiaal verdeeld maar met parameters $n = 10.000$ en $p = 0,02$. Uit de Centrale Limiet Stelling volgt nu dat $Z^* = \frac{Z-EZ}{\sqrt{\text{var}(Z)}} = \frac{Z-200}{14}$ bij benadering standaardnormaal verdeeld is. Omdat Z een discrete stochastische variabele is moeten we continuiteitscorrectie toepassen en vinden we dat

$$P(Z > 220) = P(Z > 220,5) = P(Z^* > \frac{20,5}{14}) \approx 1 - \Phi(1,46) = 0,0716.$$

c. Laat A de gebeurtenis zijn dat de donor drager is en B de gebeurtenis dat de test zegt dat de donor drager is. De gevraagde kans wordt dan als volgt berekend (met de regel van Bayes):

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0,99 \times \frac{10}{10010}}{0,99 \times \frac{10}{10010} + 0,02 \times \frac{10000}{10010}} = 0,047.$$

4. a. $f_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)dv = \begin{cases} 0, & u \notin [5,10], \\ \int_{u-3}^{\infty} \frac{e^{-(v-(u-3))/2}}{10} dv = \frac{1}{5}, & u \in [5,10]. \end{cases}$

b. Voor $t > 0$ geldt:

$$f_W(t) = \frac{d}{dt}F_W(t) \stackrel{*}{=} -f_R(\frac{1000}{t}) \times \frac{-1000}{t^2} = \begin{cases} \frac{200}{t^2} & \text{voor } t \in [100,200] \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

*) $F_W(t) = P(W \leq t) = P(\frac{1000}{R} \leq t) = P(R \geq \frac{1000}{t})$
$= P(R > \frac{1000}{t}) = 1 - F_R(\frac{1000}{t})$.

c. Rondom $u = 8$ en $v = 4$ geldt dat $f_{X,Y}(u,v) = 0 < f_x(u)f_Y(v)$, dus niet onafhankelijk.

d. $P(X < Y) = P((X,Y) \in D) = \int_5^{\infty}\int_u^{\infty} \frac{e^{-(v-(u-3))/2}}{10} dv\, du = \cdots = e^{-3/2}$, waarbij $D = \{(u,v)|u < v\}$.

5. a. Vanwege de geheugenloosheid van de exponentiële verdeling heeft X dezelfde verdeling als Z dus

$$f_X(t) = F_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t/2}, & \text{voor } t \geq 0 \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

b. T is exponentieel verdeeld met parameter 1 omdat voor $u \geq 0$ geldt

$$\begin{aligned} F_T(u) &= P(T \leq u) = P(\min(X,Y) \leq u) \\ &= 1 - P(\min(X,Y) > u) = 1 - P(X > u \text{ en } Y > u) \\ &= 1 - P(X > u)P(Y > u) = \cdots = 1 - e^{-u/2}e^{-u/2} \\ &= 1 - e^{-u}. \end{aligned}$$

c. We kunnen schrijven $V = T + Z$ met T en Z onderling onafhankelijk. We vinden dan dat

$$\begin{aligned} \rho(Z,V) &= \frac{\text{cov}(Z,V)}{\sqrt{\text{var}(Z)\text{var}(V)}} \\ &= \frac{\text{cov}(Z,T) + \text{cov}(Z,Z)}{\sqrt{\text{var}(Z)(\text{var}(T) + \text{var}(Z))}} \\ &= \frac{0 + \text{var}(Z)}{\sqrt{\text{var}(Z)(\text{var}(T) + \text{var}(Z))}} \\ &= \frac{0+4}{\sqrt{4 \times (4+1)}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}. \end{aligned}$$