Uitwerkingen

Toets 1 IEEE, Modules 1 en 2

Datum: 19 september 2007
Tijd: 10.40 – 12.10 (90 minuten)

Opgave 1

1-I) Dit is een warmmakertje. In woorden is R_V is de serieschakeling van R1, R2 en (de parallelschakeling van R3 en R4) of R_V = R1 + R2 + R3 // R4. In formulevorm wordt dit:

$$R_V = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

Dit is in principe uitgebreid genoeg. Er staan namelijk geen breuken in breuken meer. Eventueel kan er één breuk van gemaakt worden via:

$$R_V = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_3 + R_4} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

1-II) Hierbij wordt ook om inzicht gevraagd. Door iets handiger te tekenen is te zien dat R1 en R2 parallel staan. Die staan vervolgens in serie met R3 en dat geheel staat weer parallel aan R4, dus in verkorte vorm R_V = ((R1//R2)+R3)//R4. Schrijf je dit in één keer uit dan komt eruit:

$$R_V = \frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right) R_4}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4}$$

Hier staan nu nog breuken in breuken en door teller en noemer met (R1 + R2) te vermenigvuldigen kunnen we die weg werken.

$$R_V = \frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right) R_4}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2 R_4 + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + (R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} = \frac{R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4}$$

De één na laatste stap waarbij nog haakjes staan is goed genoeg.

Opgave 2

2) Het eerste inzicht hier is dat door R4 geen stroom loopt en deze dus weggelaten kan worden (dat lijkt me al punten waard). Dat is ook wel op het hoorcollege en werkcollege behandeld.

Vervolgens kun je het jezelf makkelijker maken door R2 en R3 samen te nemen tot 1 weerstand R_{eq} via $R_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ *(1)*

Nu is het de basisspanningsdeler geworden die ook op HC en WC uitgebreid aan de orde is gekomen. Via de methode van het hoorcollege kun je tot het goede antwoord komen:

$U_{uit} = U_{R2} = U_{R3} = U_{R_{eq}} = IR_{eq}$ *(2)*

$U_{bron} = U_{R1} + U_{R_{eq}} = IR_1 + IR_{eq} = I(R_1 + R_{eq}) \rightarrow I = \frac{U_{bron}}{R_1 + R_{eq}}$ *(3)*

Substitutie van (3) in (2) en (1) ook weer terug invullen geeft:

$$U_{uit} = \frac{U_{bron} R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} = \frac{U_{bron}\left(\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right)}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{U_{bron} R_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} = \frac{U_{bron} R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Als studenten hebben gebruik gemaakt van R_{eq} dienen ze dit ook weer terug in te vullen in de uiteindelijke uitdrukking. Alleen de laatste uitdrukking is dus goed (of de één na laatste waarbij nog de haakjes staan).

Opgave 3

3) Het plaatje links is een afbeelding van een niet-ideale stroombron I_{bron} met interne weerstand R_1. Dit gaat over de brontransformatie en dit bevat nauwelijks rekenwerk. Je weet / ziet het of niet: $U_X = I_{bron} \cdot R_1$ en R_X is natuurlijk gelijk aan R_1 omdat bij omschrijven van niet-ideale stroombron naar niet-ideale spanningsbron en vice versa de inwendige weerstand (hier dus R_1) gelijk blijft.

Opgave 4

4) Gevraagd wordt de Thevenin bronspanning U_{TH} en de inwendige weerstand R_i van het Thevenin equivalent.

- *Voor het berekenen van U_{TH} kijk je naar de onbelaste schakeling. Dat is zoals deze al is getekend. Dit is een spanningsdeler en via de methode van het hoorcollege volgt:*

  $U_{AB} = U_{R3} = IR_3$ *(1)*

  $U_{bron} = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} = IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) \rightarrow I = \frac{U_{bron}}{R_1 + R_2 + R_3}$ *(2)*

  Substitutie van (2) in (1) geeft:

  $U_{AB} = \frac{U_{bron} R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ *waarbij U_{AB} voor het onbelaste geval zoals hier dus gelijk is aan U_{TH}*

- *Voor het bepalen van R_i sluiten we U_{bron} kort en kijken we wat de vervangingsweerstand is tussen de klemmen A en B. R_i is gelijk aan R3 parallel aan de serieschakeling van R1 + R2 ofwel R3//(R1+R2). Dit geeft:*
  $$R_i = \frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3} = \frac{R_1R_3+R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

Opgave 5 Wiskunde-opgaven

5A) $f(t)=(at)^2+B$ waarbij *a en B zijn constanten. Deze som kan langs twee routes worden opgelost. Of ze werken de haakjes direct uit tot* $f(t)=a^2t^2+B$ *en dan is*
$f'(t)=2a^2t$
Of ze laten de haakjes in het begin staan en maken gebruik van de kettingregel: $f'(t)=2(at)a=2a^2t$ *Hierbij dienen studenten wel de haakjes weg te werken lijkt me.*

5B) $f(t)=cos(\omega t)$ *Het belangrijkste is hier goed gebruik van de kettingregel. De afgeleide is:* $f'(t)=-\omega sin(\omega t)$

5C) $f(t)=A sin(-\omega t)cos(-\omega t)$ *De eerste correcte oplossing is door standaard de productregel en kettingregel toe te passen:*

$$f'(t)=A(-\omega cos(-\omega t)cos(-\omega t)+--\omega sin(-\omega t)sin(-\omega t))$$
$$f'(t)=A\omega sin^2(-\omega t)-A\omega cos^2(-\omega t) \qquad (1)$$

Let op correct gebruik van alle mintekens.

Studenten kunnen bonuspunten verdienen als ze zien dat het product van een sin(x)cos(x) gelijk is aan 1/2sin(2x). Oftewel de functie wordt dan:

$$f(t)=A sin(-\omega t)cos(-\omega t)=\tfrac{1}{2}A sin(-2\omega t)=-\tfrac{1}{2}A sin(2\omega t) \qquad (2)$$

In de laatste stap is gebruik gemaakt van sin(-x) = -sin(x). Als ze dit als eerste stap hebben toegepast kunnen ze ook op dit antwoord uitkomen door uit te gaan van sin(-x) = -sin(x) en cos(-x) = cos(x). Dit nu differentiëren levert op:

$$f'(t)=-\tfrac{1}{2}A cos(2\omega t)2\omega=-A\omega cos(2\omega t) \qquad (3)$$

Dezelfde bonuspunten kunnen studenten verdienen als ze zien dat vergelijking 1 kan worden vereenvoudigd door gebruik te maken van $cos^2(x) - sin^2(x)$ =

cos(2x). Als ze dat op (1) toepassen vinden ze precies hetzelfde antwoord als bij (3).

5D) $f(t) = a$ *Dit is de bekende instinker om het zo te zeggen. a is een constante en de primitieve wordt dan:*

$F(t) = at + c$ *en dus niet* $F(t) = \frac{1}{2}a^2$

5E) $f(t) = \cos(\omega t)$ *Hierbij gaat het om goed gebruik van de kettingregel.*
$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + c$ *(geen minteken ervoor)*

5F) $f(t) = e^{at}$ *Ook hier gaat het om goed gebruik van de kettingregel. In de werkcolleges viel op dat studenten de e-machten vaak niet goed bij machte waren.*
$F(t) = \frac{1}{a}e^{at} + c$

Formeel moet er steeds een integratieconstante c bij de primitieven staan. Hier worden (nog) geen punten voor afgetrokken als deze ontbreekt.

Opgave 6

6A) De oplettende student heeft gezien dat hierbij van som 5-B en 5-E gebruik gemaakt kan worden: $\frac{di_{bron}(t)}{dt} = -5\omega\sin(\omega t)$ en $\int i_{bron}(t)dt = \frac{5}{\omega}\sin(\omega t) + c$
Ontbreken van de integratieconstante c leidt niet tot puntenaftrek
6B) de spanning over de condensator is:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt$$

6C) Letterlijk invullen levert op:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_{bron}(t)dt = \frac{5}{\omega C}\sin(\omega t) + \frac{c}{C} = \frac{5}{\omega C}\sin(\omega t) + D$$

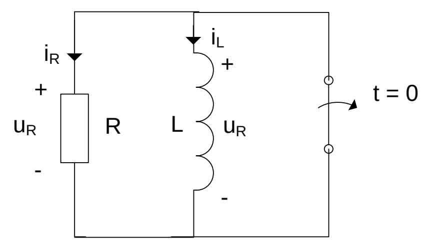
Waarbij de integraal ook al bij 6A) was uitgerekend. Er hoeft alleen nog met een factor 1/C vermenigvuldigd te worden. D is een nieuwe constante. Let op: er komt geen ω *voor in de integratieconstante. Vergeten van de integratieconstante leidt niet tot puntenaftrek.*

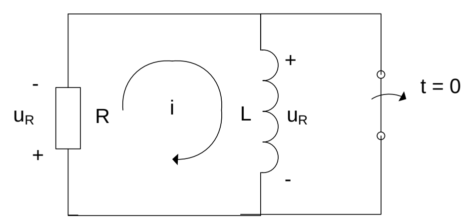
6D) de amplitude $\hat{u}_C$ *is dan gelijk aan 5 / (*ω*C) [V]*
6-E) $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ *met T = 2s wordt de hoekfrequentie* $\omega = \pi$ *[rad/s] (de eenheid moet erbij staan.*

6F) T wordt 4x zo klein dan wordt $\omega = 2\pi / T$ dus 4x zo groot. Bij 6D) is afgeleid dat $\hat{u}_C = 5 / (\omega C) = 5T / (2\pi C)$ dus de amplitude $\hat{u}_C$ wordt dan 4 x zo klein.

Opgave 7

7A) Welke referentie de studenten kiezen maakt niet zoveel uit. Beide leiden namelijk tot dezelfde DV. Wat wel belangrijk is is dat studenten de referentie voor u en i per element consequent toepassen,dat wil dus zeggen dat een element ingaande stroom bij de hoogste potentiaal (+ kant) het element binnengaat. Onderstaande twee oplossingen zijn dus goed.





Circuit 1. Eerst de spanningsreferentie vastleggen en daaruit volgt de stroom

Circuit 2. Eerst de stroomreferentie (kringstroom) vastleggen en daaruit volgt de spanning

7B) Circuit 1: $i_R = - i_L$ en circuit 2 : $i_R = i_L$ (= i)

7C) Circuit 1: $u_R = u_L$ (=u) en circuit 2 : $u_R = -u_L$

7D) voor beide circuits : $u_R = i_R \cdot R$ of $i_R = u_R / R$

7E) voor beide circuits : $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$ *of* $i_L = \dfrac{1}{L}\int u_L dt$

7F) Je begint met:

Stap:	*Wat:*	*Circuit 1:*	*Circuit 2:*
(1)	*de vgl van 7B)*	$i_L = - i_R$	$i_L = i_R$
(2)	*Substitueer vgl van 7D)*	$i_L = -u_R/R$	$i_L = u_R/R$
(3)	*Substitueer vgl van 7C)*	$i_L = -u_L/R$	$i_L = -u_L/R$

Vanaf hier voor beiden gelijk:

(4) substitutie van $u_L = L\frac{di_L}{dt}$ *in vergelijking (3):*

$$i_L = -\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} \rightarrow \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

Opgave 8

8A) Deze opgave vraagt niet eens zozeer fysisch inzicht maar wiskundige vaardigheden toepassen en stug doorrekenen. Wiskundig wordt dus naar een vergelijking gevraagd die "klopt" ofwel dat links en rechts in de vergelijking hetzelfde komt te staan. Letterlijk invullen van de algemene oplossing

$u_R(t) = u_{bron}(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) = u_{bron} - u_{bron}e^{-\frac{t}{L/R}}$ *in de DV* $\frac{L}{R}\frac{du_R(t)}{dt} + u_R(t) = u_{bron}$ *geeft:*

$$\frac{L}{R}\frac{d(u_{bron} - u_{bron}e^{-\frac{t}{L/R}})}{dt} + u_{bron} - u_{bron}e^{-\frac{t}{L/R}} = u_{bron} \qquad (1)$$

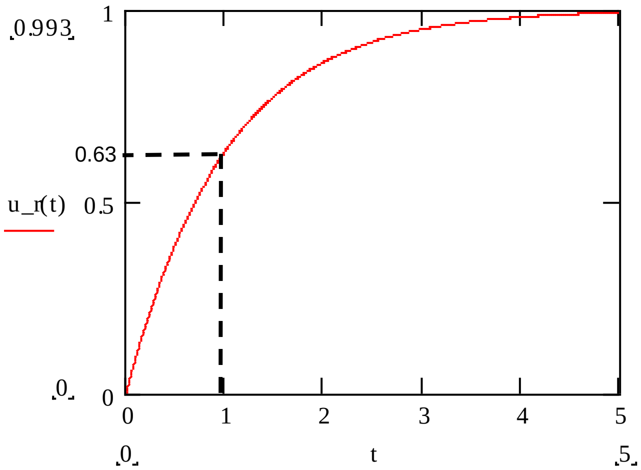
De afgeleide van $u_R(t)$ *uitwerken en links en rechts vallen een* u_{bron} *tegen elkaar weg:*

$$-\frac{L}{R}\frac{-R}{L}u_{bron}e^{-\frac{t}{L/R}} - u_{bron}e^{-\frac{t}{L/R}} = 0$$

Verder uitwerken (let goed op alle mintekens) geeft:

$u_{bron}e^{-\frac{t}{L/R}} - u_{bron}e^{-\frac{t}{L/R}} = 0$ *ofwel 0 = 0 wat wiskundig gezien klopt.*

8B) hier staat een voorbeeld van de grafiek voor U_{bron} *= 1V en* τ *= 1s*



Belangrijk is dat is aangegeven dat bij t=0 de grafiek ook op 0V begint. Bij t = τ heeft de grafiek 63% van zijn eindwaarde bereikt. De eindwaarde is U_{bron}. Het verloop is volgens een e-macht. (Op t = 5τ heeft de grafiek 99% van zijn eindwaarde bereikt).

Bonusvraag

Bonusvraag) De redenering kan heel kort zijn. Er wordt naar stationaire situaties gevraagd, in andere woorden DC-gevallen. Een condensator laadt op als er een DC-spanning op wordt gezet (inschakelverschijnselen) en als deze vol is, kun je deze vervangen door een open verbinding. Een spoel zal zodra er een DC-spanning op wordt gezet een tegenspanning opwekken zodra er echter een constante stroom door de spoel vloeit, zal er geen spanning meer over vallen en is het een kortsluiting geworden. De weerstand tenslotte blijft gewoon de weerstand. Dit toepassende op bovenstaande situaties geeft dan dat alleen in circuit A) er geen constante stroom zal vloeien en in alle andere gevallen is er altijd een weg via een L of R waardoor een constante stroom kan vloeien.