# Elektromagnetische veldtheorie (127112)
# Voorbeeld tentamen

Opmerkingen vooraf:

- Besteed aandacht aan een juiste notatie bij de uitwerkingen! Onderscheidt bijvoorbeeld vectoren en scalairen goed.
- Geef steeds duidelijk aan welke formules bij de uitwerkingen worden gebruikt.
- Geef bij gebruik van de integratiestellingen van Gauss of Stokes steeds duidelijk aan (bij voorkeur in een tekening) over welke volumina, oppervlakken en contouren wordt gentegreerd. Geef bij de integratie over oppervlakken of contouren ook duidelijk de richting van $dS$ respectievelijk $dl$ aan.
- Indien schetsen in de figuren van het opgavenblad worden gemaakt die deel uitmaken van de uitwerking (b.v. oppervlakken, contouren, vectoren) dan moet het opgavenblad mede worden ingeleverd! Vermeld op deze bladen ook je naam en studentnummer!
- Er is een formuleblad bij de tentamenopgaven gevoegd.
- De puntenverdeling van de opgaven is als volgt:

  Opg. 1: 20%
  Opg. 2: 20%
  Opg. 3: 20%
  Opg. 4: 20%
  Opg. 5: 20%

- Enkele standaardintegralen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

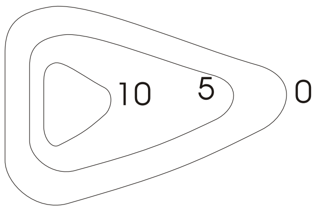
$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int R^n dR = \frac{R^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$
$$\int \frac{1}{R} dR = \ln R$$

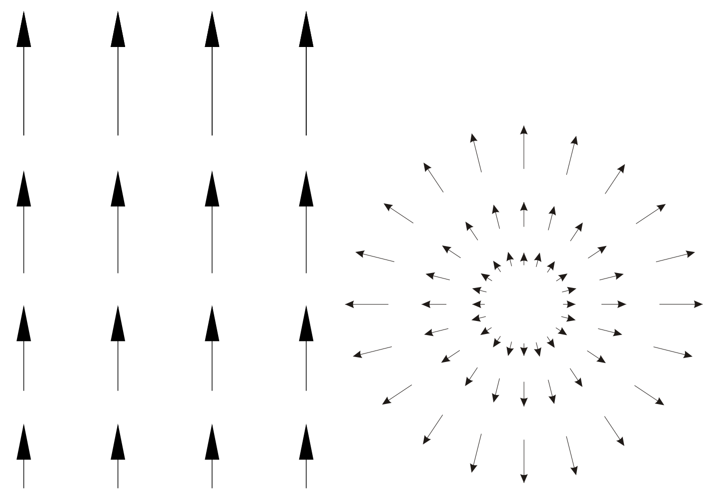
# Opgave 1 (begripsvragen)

*Deze vragen kunnen kort worden beantwoord, er is geen rekenwerk nodig. Ze zijn bedoeld om te testen of je de stof echt hebt begrepen.*

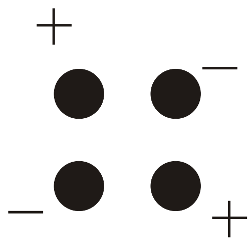
a. De onderstaande figuur geeft de equipotentiaallijnen van een scalair veld weer. Schets in de figuur de grootte en richting van het gradient van het bijbehorende vectorveld.



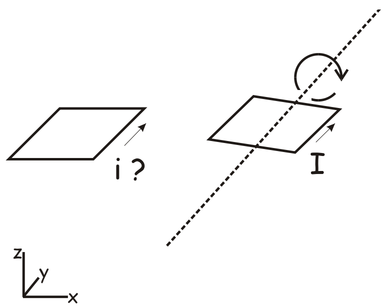

b. Geef voor de onderstaande vectorvelden aan of de rotatie en/of de divergentie van die velden nul is (Geef dus **4** antwoorden, $rot(\boldsymbol{A}) = 0, div(\boldsymbol{A}) \neq 0$ etc.)



c. Gegeven twee positieve ladingen $Q$ en twee negatieve ladingen $-Q$, in een quadrupool configuratie zoals in de figuur is weergegeven. Wat is de grootte en de richting van het electrische veld op grote afstand van deze quadrupool?



d. We hebben twee spoelen. Een staat stil en de andere draait daarbij om zijn as (parallel aan de $y$-as). In de draaiende spoel loopt een stroom $I$ Schets de geinduceerde stroom $i$ in de stilstaande spoel als functie van de tijd.




e. In het grootste deel van de ruimte om ons heen geldt dat de divergentie en rotatie van het electrische en magnetische veld nul zijn:

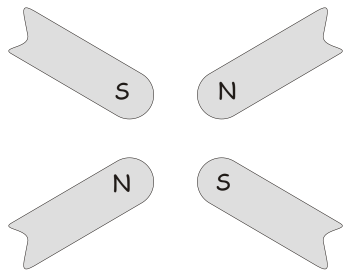
$$\begin{array}{cc} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 & \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 & \nabla \times \boldsymbol{B} = 0 \end{array}$$

Hoe kan het dan dat er toch electrische en magnetische velden om ons heen zijn?

## Opgave 2 (leesopgave)

*In deze opgave testen we of je met het boek van Feynman kunt werken, en of je basiskennis van het electromagnetische veld voldoende is om nieuwe, geavanceerdere onderwerpen snel te begrijpen.*

Lees in het boek van Feynman paragraaf 29-4 over de magnetisch lens op bladzijde 29-3. Wat gebeurt er met de lens als we de spoel anders aansluiten zodat we de noord en zuidpool van de rechter poolschoen omkeren (zie figuur).




## Opgave 3 (rekenopgave)

Gegeven een statisch elektrisch veld $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$ dat kan worden beschreven door

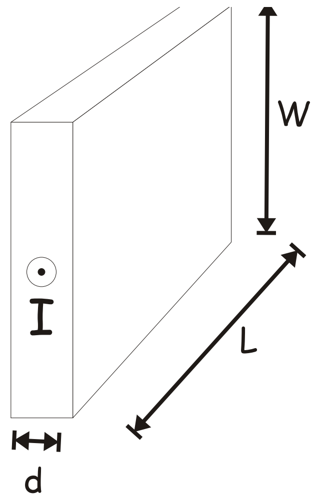
$$E_x = \frac{x}{(x^2+y^2)^n}$$
$$E_y = \frac{y}{(x^2+y^2)^n}$$

a. Dit is een statisch elektrisch veld, dus moet zijn rotatie gelijk zijn aan nul. Laat door een berekening zien dat dit het geval is ($\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$).

b. Voor welke waarde(n) van $n$ geldt dat de divergentie van $\boldsymbol{E} = 0$ ($\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$).

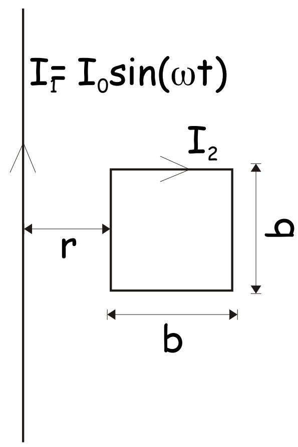
## Opgave 4 (rekenopgave)

We hebben oneindig lange, rechthoekige geleider met een doorsnede $w \times d$ ($L >> w, d$). Door deze geleider loopt een stroom $I$. Bereken de richting en grootte van het magnetische veld zeer dicht bij de geleider.




## Opgave 5 (rekenopgave)

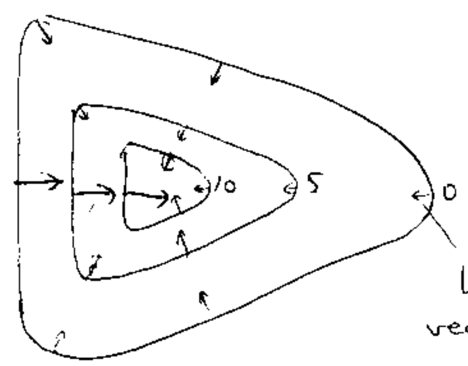
Gegeven een oneindig lange rechte stroomgeleider waardoor een wisselstroom $I_1 = I_0 \sin(\omega t)$ loopt. Bereken de *emf*, $\varepsilon$, die door de wisselstroom $I_1$ wordt opgewekt in een vierkante spoel met afmeting $b \times b$ op een afstand $r$ van de stroomgeleider (zie figuur)



Proef tentamen

Opgave 1

a)



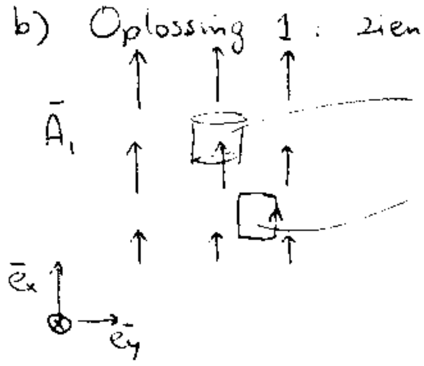

kleine vectoren

grote vectoren

$$\bar{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\bar{e}_z$$

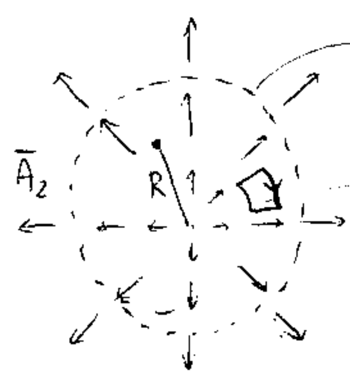
- vectoren $\perp$ equipotentiaallijnen
- in richting van grootste verandering

b) Oplossing 1: zien




$\oint \bar{A}\cdot d\bar{s} > 0 \Rightarrow$ $\mathrm{div}(\bar{A}) \neq 0$

$\oint \bar{A}\cdot d\bar{l} = 0 \Rightarrow$ $\mathrm{rot}(\bar{A}) = 0$




$\oint \bar{A}\cdot d\bar{s} > 0 \Rightarrow$ $\mathrm{div}(\bar{A}) \neq 0$

$\oint \bar{A}\cdot d\bar{l} = 0 \Rightarrow$ $\mathrm{rot}(\bar{A}) = 0$

Oplossing 2: rekenen

$R = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\bar{A}_1 = A_x\bar{e}_x = f(x)\bar{e}_x$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A}_1 = \frac{\partial A_x}{\partial x}\bar{e}_x = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\bar{e}_x \neq 0$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{A}_1 = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ A_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bar{A}_2 = f(R)\,(x,y,0) = f(R)x\,\bar{e}_x + f(R)y\,\bar{e}_y$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{A}_2 = \frac{\partial}{\partial x}\big(f(R)x\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(f(R)y\big) =$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}\big(f(R)\big) + f(R) + y\frac{\partial}{\partial y}f(R) + f(R) =$$

$$x\frac{\partial f}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial y} + 2f(R) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial R}\left\{x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\} + 2f(R) \neq 0 \text{ i.h.a.}$$

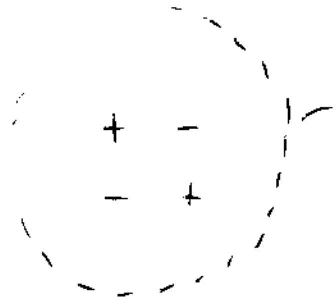
$$\frac{\partial f}{\partial R}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 2f(R) \neq 0 \text{ i.h.a.}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{A}_2 = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\big(f(R)y\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(f(R)x\big)\right\}\cdot\bar{e}_z =$$

$$y\frac{\partial f}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial R}\left(y\frac{x}{R} + x\frac{y}{R}\right) = 0$$

Beter zien dan rekenen dus..

c)

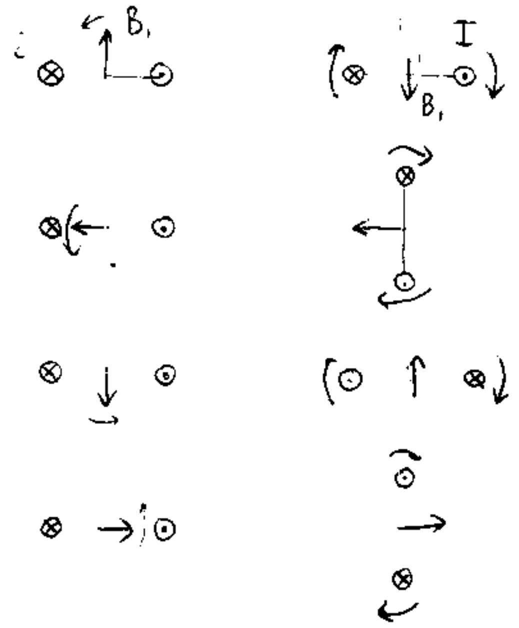


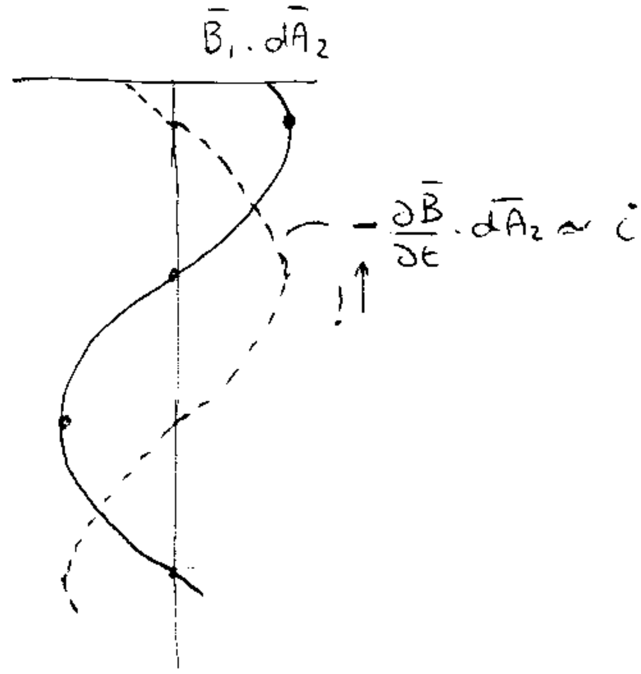
$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = 0 \quad \left(\Sigma(\text{ladingen}) = 0\right)$$

Op grote afstand is $\bar{E}$ radiaal, dus

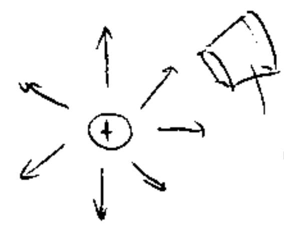
$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{S} = \bar{E}(R)\oint dS = 0 \Rightarrow \bar{E}(R) = 0$$

d) $\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{s}$



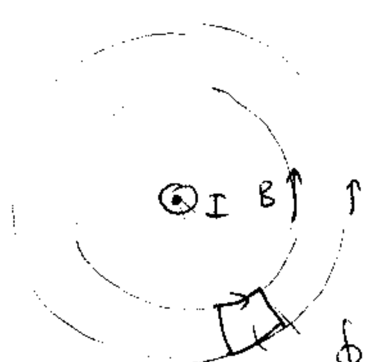




e) Als divergentie en rotatie nul zijn, wil dat niet zeggen dat het veld nul is.



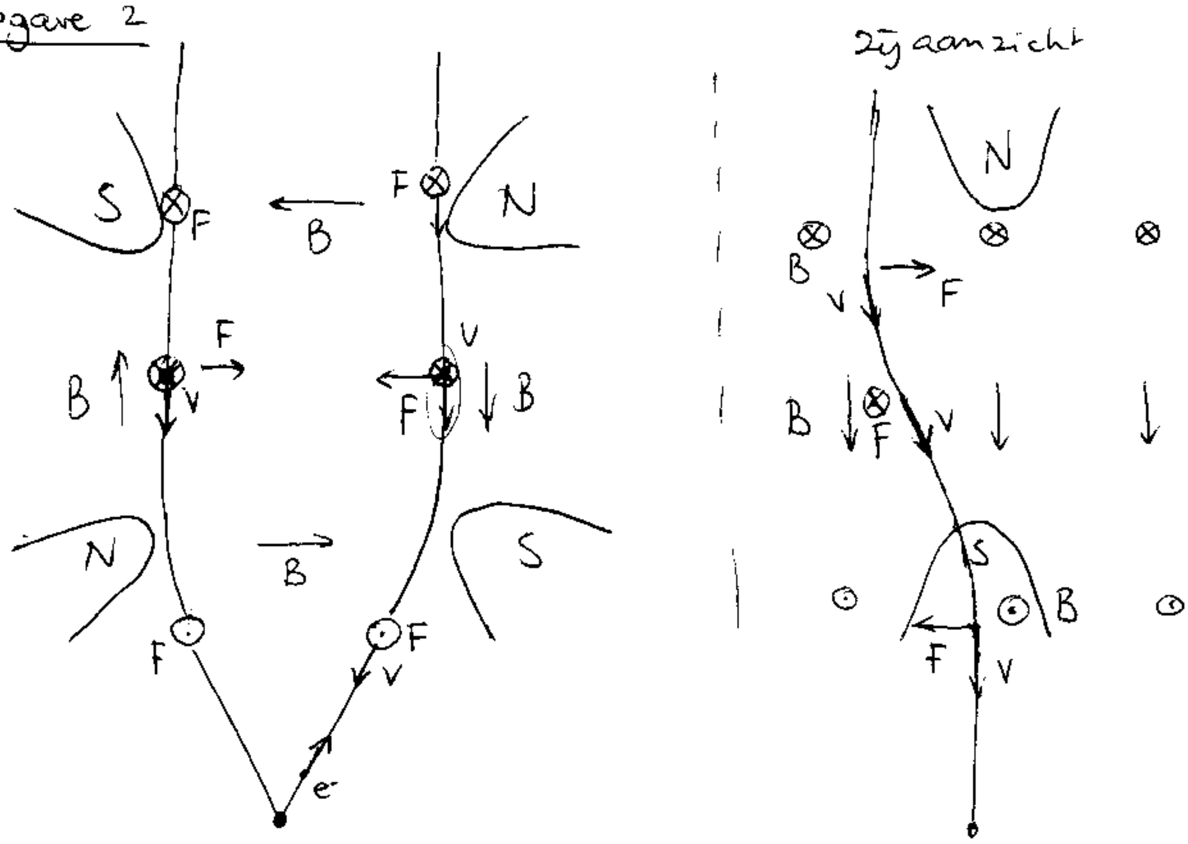
$\int \bar{E}\cdot d\bar{S} = 0$

$\bar{E}$ veld van puntbron



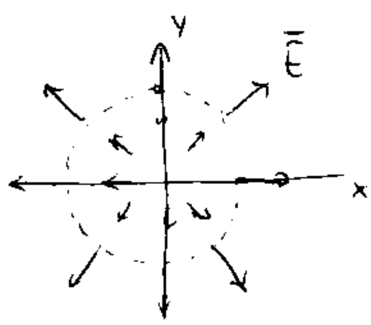

$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = 0$

## Opgave 2




lens blijft functioneren als lens

## Opgave 3




$$E_x = x\,(x^2+y^2)^{-n} = x\,R^{-2n}$$
$$E_y = y\,(x^2+y^2)^{-n} = y\,R^{-2n}$$
met $R = \sqrt{x^2+y^2}$

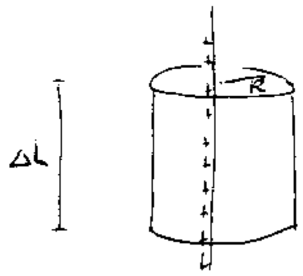
a) $$\bar{\nabla}\times\bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = +\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = y\ -2n.R^{-2n-1}\cdot\frac{x}{R} = -2nxy\ R^{-2n-2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = x\ .-2n.R^{-2n-1}\ \frac{y}{R} = -2nyx\ R^{-2n-2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

b) Dit is het $\bar{E}$-veld van een geladen draad.




$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{S} = E(R)\,\pi R^{2}\Delta L = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon}\lambda\,\Delta L$$

$$E(R) \sim \frac{1}{R^2} \quad \text{dus} \quad n = \cancel{2}\ 1$$

$$(x^2+y^2)^n = R^{2n}$$

met hard werken:

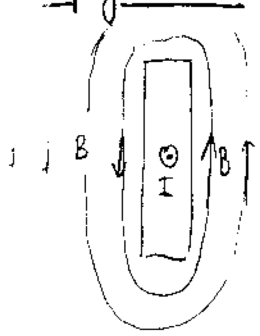
$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = x \cdot -n\,(x^2+y^2)^{-n-1}\cdot 2x + 1\cdot(x^2+y^2)^{-n} = -2nx^2 R^{-2n-2} + R^{-2n}$$

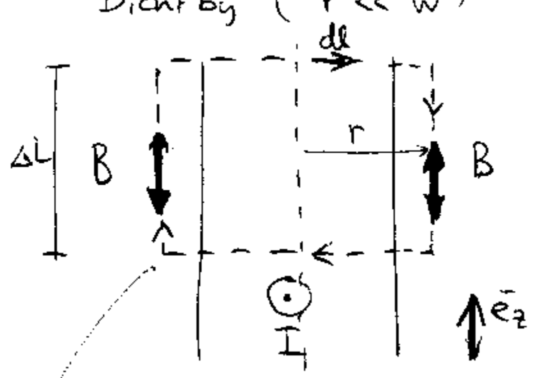
$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -2ny^2 R^{-2n-2} + R^{-2n}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = -2n\,(x^2+y^2)R^{-2n-2} + 2R^{-2n} = -2n\,R^{-2n} + 2R^{-2n} = 0 \quad \text{voor } n = 1$$

<u>Opgave 4</u>




Dicht bij ($r \ll W$)



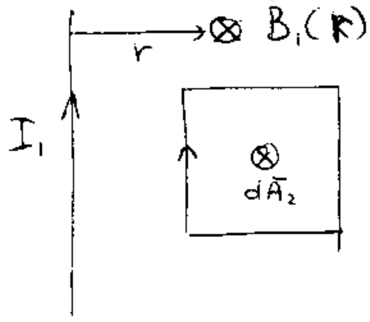

Symmetrie $B(r) = -B(-r)$
$B$ is constant ($\infty$ plaat)

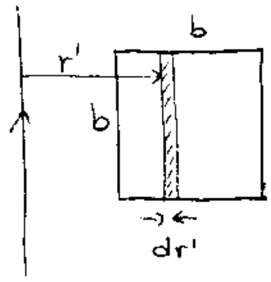
$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = 2B\,\Delta L = \oint \bar{j}\,d\bar{S} = j\,d\,\Delta L$$

$$B = \frac{jd}{2} = \frac{I}{2w}$$

$$j = \frac{I}{wd}$$

Opgave 5




$$\bar{B}_1(r) = \frac{I_1}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} \qquad I_1 = I_0 \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \bar{B}_1 \cdot d\bar{A}_2$$

$$\oint \bar{B}_1 \cdot d\bar{A}_2 = \oint B_1 \, dA_2 = b \int_r^{r+b} B_1(r')\,dr'$$

$$= \frac{I_1 b}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \int_r^{r+b} \frac{1}{r'}\,dr' = \frac{I_1 b}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln \frac{r+b}{r}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint B_1 \, dA_2 = -\frac{b}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln\frac{r+b}{r} I_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$= \frac{-b\omega I_0}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \ln \frac{r+b}{r} \cos(\omega t)$$

Leon juni 2001